

**Gabriel Pedro Ramos Maciel**

**Estudo de suspensões veiculares ativas e  
semi-ativas utilizando técnica de  
multicorpos.**

Monografia de Conclusão de Curso  
apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para  
obtenção do Título de Engenheiro

**Gabriel Pedro Ramos Maciel**

**Estudo de suspensões veiculares ativas e  
semi-ativas utilizando técnica de  
multicorpos.**

Monografia de Conclusão de Curso  
apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para  
obtenção do Título de Engenheiro

Área de concentração:  
Engenharia Mecatrônica

Orientador:  
Prof. Dr. Roberto Spinola  
Barbosa

São Paulo  
2008

São Paulo, 27 de Novembro de 2008.

Assinatura do autor.

Assinatura do orientador.

### **Ficha Catalográfica**

Maciel, Gabriel Pedro Ramos

Estudo de suspensões veiculares ativas e semi-ativas utilizando técnica de multicorpos.. São Paulo, 2008. 56 p.

Monografia de Conclusão de Curso (Graduação) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1. Dinâmica veicular. 2. Multicorpos. 3. Suspensão ativa.  
Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.



# Agradecimentos

O autor quer manifestar seus agradecimentos ao Professor Dr. Roberto Spinola Barbosa pela orientação, confiança, incentivo e toda atenção que me foi cedida durante o desenvolvimento desse trabalho;

à minha mãe e minha avó, por todos os ensinamentos, amor, carinho, atenção e cuidados dados durante toda a minha vida. Pelo apoio constante e incondicional sem os quais este sonho não seria realidade;

aos professores que contribuíram para minha formação durante todas as etapas de minha vida como estudante. Entre eles, manifesto especial agradecimento ao Professor Dr. Lucas Antônio Moscato pelas orientações, atenção e apoio durante os três primeiros anos da graduação.

aos amigos pela ajuda nas horas de estudo, que foi indispensável em cada uma das matérias da graduação;

# Resumo

Neste trabalho deseja-se estudar a dinâmica vertical de veículos automotores comerciais, comparando o comportamento dos mesmos frente a diferentes estratégias de controle aplicadas a suspensões ativas e semi-ativas. Com objetivo de aumentar o nível de conforto dentro do veículo, serão implantados diferentes tipos de controladores utilizando ferramentas computacionais de simulação. Desta maneira, é possível implementar estratégias elaboradas de controle, aplicadas a sistemas dinâmicos onde a resposta não é facilmente alcançada por meio de métodos analíticos.

Para este tipo de análise, é comum usar modelos simplificados com poucos graus de liberdade e aproximações geométricas do sistema. Porém, este tipo de abordagem desconsidera características e elementos do veículo que são importantes para obter respostas mais próximas daquelas obtidas no sistema real.

Com objetivo de analisar fenômenos que não podem ser observados nestas simplificações, foi construído um modelo de veículo completo usando software ADAMS de multicorpos. O modelo é compatível com um carro de passeio e nele, são simulados quatro atuadores que atuam no lugar de cada um dos quatro amortecedores do sistema de suspensão do automóvel.

O valor da força aplicada por cada atuador é definida pelo laço de controle, que é retroalimentado pela informação fornecida por elementos virtuais que representam sensores. Estas informações podem ser velocidades, acelerações ou deslocamentos, tanto relativos quanto absolutos.

Palavras chave: dinâmica; veículo; multicorpos; suspensão ativa

# Abstract

The objective in this work is to study the dynamic behavior of commercial automotive vehicles with active or semi active suspensions, comparing the system's performance adopting different control strategies. Focusing on improving the comfort inside the vehicle, different types of controllers were implemented using CAE tools. Doing this, it is possible to model elaborated control strategies applied to dynamic systems which the behavior is not easily reached using analytical methods. To perform this kind of analysis, it is common to use simplified models with few degrees of freedom and geometric approximations of the system. However, this kind of model doesn't consider vehicle's characteristics and elements that are important to obtain responses that are closer to the real system's ones. A full vehicle model was built using a multibody software ADAMS with the objective to analyze phenomena that can't be observed using those simplifications. The vehicle is compatible to a passenger car and inside it there are four actuators taking place of each damper in the suspension system. The value of the force of each actuator is determined by the control loop and the feedback data is provided by virtual elements that simulates sensors. This information can be a set of velocities, accelerations and displacements for example.

Key words: dynamic; vehicle; multibody; active suspension

# Conteúdo

## **Lista de Figuras**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
1.1	Controle de vibrações . . . . .	15
1.2	Conforto frente a vibrações veiculares . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Revisão da teoria de sistemas multicorpos</b>	<b>20</b>
2.1	Método de Lagrange . . . . .	21
2.2	Estudo do sistema . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Controle de vibrações</b>	<b>27</b>
3.1	Controlador proporcional . . . . .	31
3.2	Controlador derivativo (Skyhook) . . . . .	31
3.3	Controlador integral . . . . .	36
3.4	Controlador PD . . . . .	37
3.5	Controlador PI . . . . .	38
3.6	Controlador ID . . . . .	38
3.7	Controlador PID . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Modelo de veículo completo</b>	<b>42</b>
4.1	Resposta em freqüência do modelo . . . . .	43
4.2	Pólos do sistema . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>47</b>
5.1	Índice de conforto . . . . .	47
5.2	Energia gasta pelos sistemas ativos . . . . .	50

5.3 Força de contato pneu-pista . . . . .	52
<b>6 Conclusões</b>	<b>54</b>
<b>Referências</b>	<b>55</b>

# Listas de Figuras

1.1	Escala do grau de desconforto sugerido pela ISO2631 (8). . . . .	19
2.1	Disco rolando sobre um plano. . . . .	21
2.2	Modelo de um quarto de veículo. . . . .	24
3.1	Laço de controle com compensação em série. . . . .	27
3.2	Laço de controle com compensação por realimentação. . . . .	27
3.3	Laço de controle com compensação por realimentação de estado. .	28
3.4	Laço de controle com compensação por realimentação em série. .	28
3.5	Laço de controle com compensação com feedforward. . . . .	28
3.6	Laço de controle com compensação com feedforward. . . . .	28
3.7	Modelo de veículo completo com sete graus de liberdade. . . . .	29
3.8	Controlador P ideal (esquerda) e implementado (direita). . . . .	31
3.9	Lugar das raízes para o sistema com controlador P. . . . .	32
3.10	Lugar das raízes para o sistema com controlador skyhook. . . . .	32
3.11	Amortecimento skyhook ideal (esquerda) e implementado (direita). .	33
3.12	Laço de controle com controlador de skyhook. . . . .	33
3.13	Modelo de meio veículo com amortecimento skyhook para arfagem. .	34
3.14	Modelo de meio veículo com amortecimento skyhook para rolagem. .	35
3.15	Controlador I ideal (esquerda) e implementado (direita). . . . .	36
3.16	Lugar das raízes para o sistema com controlador I. . . . .	36
3.17	Controlador PD ideal (esquerda) e implementado (direita). . . . .	37
3.18	Lugar das raízes para o sistema com controlador PD. . . . .	37
3.19	Controlador PI ideal (esquerda) e implementado (direita). . . . .	38
3.20	Lugar das raízes para o sistema com controlador PI. . . . .	39

3.21	Controlador ID ideal (esquerda) e implementado (direita).	39
3.22	Lugar das raízes para o sistema com controlador ID.	40
3.23	Resposta em frequencia do deslocamento $Z_2$ com controlador ID.	40
3.24	Laço fechado com controlador PID.	41
3.25	Lugar das raízes para o sistema com controlador PID.	41
4.1	Modelo de veículo completo em software de multicorpos	42
4.2	Diagrama de Bode do movimento vertical do chassi - Magnitude	43
4.3	Diagrama de Bode do movimento vertical do chassi - ângulo de fase	43
4.4	Diagrama de Bode do movimento lateral do chassi - Magnitude	44
4.5	Diagrama de Bode do movimento lateral do chassi - Ângulo de fase	44
4.6	Diagrama de Bode do movimento de arfagem do chassi - Magnitude	45
4.7	Diagrama de Bode do movimento de arfagem do chassi - Ângulo de fase	45
4.8	Diagrama de Bode do movimento de rolagem do chassi - Magnitude	45
4.9	Diagrama de Bode do movimento de rolagem do chassi - Ângulo de fase	46
4.10	Pólos do sistema	46
4.11	Pólos do sistema (detalhe)	46
5.1	Deslocamento vertical do centro de massa do chassi	47
5.2	Aceleração vertical do centro de massa do chassi	48
5.3	Deslocamento lateral do centro de massa do chassi	48
5.4	Aceleração lateral do centro de massa do chassi	48
5.5	Suavização da curva de entrada degrau do sistema	49
5.6	Suavização da curva de entrada tipo pulso no sistema	49
5.7	Dimensões do buraco na simulação com veículo em movimento.	49
5.8	Aceleração vertical do assento do motorista para entrada degrau.	50
5.9	Aceleração vertical do assento do motorista para entrada degrau.	50
5.10	Aceleração lateral do assento do motorista para entrada degrau.	51

5.11 Força nos atuadores dianteiros (entrada pulso 80mm). . . . .	51
5.12 Força nos atuadores traseiros (entrada pulso 80mm). . . . .	51
5.13 Potência no atuador dianteiro esquerdo (entrada pulso 80mm). .	52
5.14 Força de contato entre o pneu dianteiro esquerdo e a pista. . . .	52
5.15 Força de contato entre o pneu traseiro direito e a pista. . . . .	53

# Lista de Símbolos

$N$	Número de partículas em um sistema multicorpos
$x_j$	Variável de um sistema
$q_i$	Coordenada generalizada
$p_j$	Momento linear de um corpo na direção $x_j$
$P_i$	Momento linear generalizado na direção de $q_i$
$F_j^{(ext)}$	Força externa ao sistema na direção $x_j$
$f_j$	Força no vínculo
$T$	Energia cinética
$V$	Energia potencial
$Q_i$	Forças generalizadas no sistema
$\lambda_m$	Multiplicador de Lagrange
$w$	Força no atuador
$\theta$	Ângulo de arfagem do veículo
$\varphi$	Ângulo de rolagem do veículo

# 1 Introdução

Devido à crescente exigência por veículos mais confortáveis, seguros e silenciosos, os esforços no estudo da dinâmica veicular vertical com o intuito de diminuir as vibrações dentro do veículo tem aumentado significativamente. Apesar do melhor desempenho apresentado pelas suspensões ativas e semi-ativas, grande parte dos veículos comercializados hoje ainda utiliza a tecnologia de amortecimento passivo. Isso se deve ao fato de que estes sistemas ainda tem custo muito elevado, ocasionando uma considerável desvantagem neste mercado extremamente competitivo.

O desenvolvimento de novos dispositivos para melhorar o desempenho de sistemas passivos de amortecimento de vibrações é uma solução que ainda é explorada. Wang e Su (17) publicaram recentemente um estudo sobre a influência da não linearidade de dispositivos chamados *inertier* em suspensões veiculares. Estes dispositivos passivos aplicam uma força proporcional à aceleração relativa entre suas extremidades, porém sua aplicação em veículos ainda se restringe à simulações e protótipos.

As suspensões ativas apresentam uma desvantagem comparadas aos sistemas semiativos e passivos devido à complexidade e preço do equipamento. São usados no sistema de suspensão quatro atuadores quem podem ser pneumáticos, hidráulicos, eletro-mecânicos ou magnéticos.

Na última década, pesquisadores desenvolveram diversas maneiras de implementar sistemas de controle de vibrações usando atuadores semi-ativos. Os mecanismos passivos convencionais têm como vantagem o baixo custo e a simplicidade do projeto mecânico, porém tem limitações de desempenho causadas pela força de amortecimento que não pode ser controlada. Essa limitação pode ser contornada com a utilização de atuadores que realizam o papel dos amortecedores, desta maneira podem ter a força de amortecimento controlada. Também é comum chamar estes atuadores de amortecedores de amortecimento variável.

As maneiras mais comuns de implementar este tipo de atuador é com a utiliza-

ção de amortecedores com fluidos eletro-reológicos (ER) ou magneto-reológicos (MR). A característica principal destes fluidos é a possibilidade de mudar a sua viscosidade através da aplicação de um campo elétrico ou magnético respectivamente, sendo este último o mais comumente utilizado.

O desenvolvimento de sistemas de suspensões ativas e semi-ativas cada vez mais sofisticados e inteligentes é auxiliado por ferramentas computacionais que auxiliam o engenheiro a prever o comportamento do sistema antes de sua implementação física. Estas ferramentas tem auxiliado na comparação de diversas alternativas de projeto, viabilizado otimizações e sobretudo diminuir tempo e custos de desenvolvimento.

## 1.1 Controle de vibrações

Nas últimas décadas, diferentes tipos de controladores foram implementados e seu desempenhos comparados entre si por muitos pesquisadores. Algumas das estratégias mais estudadas são as de controle robusto (3, 11, 13, 20), LQG (linear quadratic gaussian) (14, 18), não linear (4), skyhook (4, 15), preditivo e HSIC (18).

Park e Kim (13), projetaram um controlador  $H_\infty$  ótimo para um sistema linear de um quarto de veículo e sua performance foi comparada com o controlador LQG apresentado por Ray (14). O controlador  $H_\infty$  apresenta uma resposta ligeiramente pior que o LQG em questão na faixa de 1 a 10Hz quando é observada a aceleração vertical do chassis.

No mesmo artigo, os autores observam que os dois métodos ativos de controle levam vantagem comparados ao passivo em freqüências na faixa de 1Hz. Entretanto, não apresentam melhor resposta em valores próximos a 10Hz, que é a freqüência de ressonância da roda. Também foi observado que as suspensões ativas têm maior amplitude de deflexão na suspensão, comparados ao método passivo de amortecimento.

De acordo com o autor, considerando que a planta real é não linear e que o controlador foi sintonizado para um ponto fixo de operação, a resposta do sistema pode se tornar instável frente a mudanças da planta. Por este fator, o controlador tem que necessariamente ser robusto quanto à estabilidade. Desta maneira, ele varia em  $\pm 25\%$  o valor de parâmetros como rigidez da mola e pneu, coeficiente de amortecimento da suspensão e massa do chassis.

Os resultados apresentados mostram que o controlador LQG se torna instável

para uma diminuição simultânea, de 25%, nos parâmetros de rigidez da mola e coeficiente de amortecimento. Contudo, o controlador  $H_\infty$  se manteve estável frente à todas as combinações dos parâmetros analisados. O parâmetro que causou maior sensibilidade na estabilidade do controlador foi a rigidez da mola. Outro exemplo de controlador robusto foi implementado por Du e Zhang (3) usa restrições durante o projeto do controlador. As restrições usadas foram: deflexão máxima da suspensão para evitar danos ao equipamento, força de contato entre o pneu e a pista e saturação da força do atuador.

Yu (18) implementou um controlador HSIC com e sem um preditor de Smith. O controlador tem objetivo de melhorar o desempenho do sistema controlado considerando seu tempo de resposta. Testes foram realizados em simulações computacionais e provas reais com veículo na pista. Os resultados comparados foram obtidos de estratégias de controle LQG, passiva e HSIC (esta última com e sem o Preditor de Smith). O controlador proposto com preditor de Smith apresentou melhor conforto na faixa de 1,4 a 10Hz comparado aos demais. Porém constatou-se que todos os controladores estudados não tiveram efeito significativo nas faixas de alta freqüência.

Um controlador híbrido linear e não-linear baseado na estratégia de skyhook foi implementado por ElBeiheiry (4) em sistemas de suspensão ativos. O modelo do sistema leva em conta o atrito de Coulomb, que é uma não linearidade que afeta bastante o desempenho de sistemas que utilizam atuadores hidráulicos. A sintonização do controlador foi realizada através de um algoritmo de otimização devido à sua complexidade.

## 1.2 Conforto frente a vibrações veiculares

O efeito biológico da vibração no corpo humano tem sido estudado de maneira a estabelecer limites de exposição, de acordo com dados experimentais. Estes critérios de exposição podem ser encontrados em normas como ISO 2631:1997 (8) e BS 6841:1987 (1).

De acordo com Griffin (7), os parâmetros mais importantes para a determinação do desconforto causado por vibrações são amplitude, frequência, tempo de exposição e direção do movimento. Outros fatores que também influenciam na caracterização do desconforto são os de caráter individual, ou seja, que variam com cada pessoa. Estes últimos são desconsiderados pela maioria dos autores.

De acordo com Chaffin, Anderson e Martin (2), são considerados três inter-

valos de frequência para caracterizar os efeitos da vibração no corpo. Isso se deve ao fato de que para cada intervalo, um sistema específico do organismo é predominantemente estimulado. Os valores que separam os intervalos podem variar de acordo com a referência adotada, mas sempre são próximos.

- O sistema vestibular é mais sensível em freqüências menores que 2 Hz. Este sistema é composto pelos sensores localizados na orelha interna e labirinto. Este intervalo normalmente é predominante em barcos, guindastes, edifícios, aeronaves, carros, ônibus, etc.
- Os tecidos corporais são mais sensíveis à frequências de 2 a 20 Hz. Este é o intervalo onde ocorre a ressonância dos órgãos do tórax e abdômen, predominante de aeronaves e veículos em geral.
- Os músculos, tendões e tecidos cutâneos são mais sensíveis em intervalos de 20 a 300 Hz, predominantes em ferramentas e maquinário.

A norma *International Standard* (8) define um método para quantificar o desconforto sentido por um ser humano exposto às vibrações mecânicas dentro de um veículo. Existem três tipos de exposição do corpo frente à vibrações.

- a) Vibrações transmitidas quando o corpo está imerso no meio vibrante. Este ocorre, por exemplo, quando o corpo está sujeito a vibrações acústicas.
- b) Vibrações transmitidas para o corpo como um todo através da superfície de apoio. Como a vibração transmitida através do banco do veículo.
- c) Vibrações transmitidas para uma parte específica do corpo. Como a vibração transmitida do volante para as mãos do condutor.

Neste trabalho, será dado foco às vibrações transmitidas através de uma superfície de apoio. As vibrações causadas no corpo humano podem ser avaliadas e quantificadas de acordo com seu valor em r.m.s. (root mean square).

$$r.m.s. = \left[ \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} a_w^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

Onde  $a_w(t)$  é a aceleração ponderada no domínio da freqüência.

A função ponderação é usada porque existem bandas de frequência que causam mais desconforto que outras no corpo humano. Portanto, devem ter maior influência na quantificação do desconforto que as outras.

A aceleração ponderada pode ser calculada, no domínio da frequência, com a equação abaixo. Os termos da somatória se referem a cada faixa de um terço de

oitava, como é indicado pela norma ISO 2631:1997.

$$a_w^2(w) = \sum_i (p_i \cdot a_i)^2 \quad (1.2)$$

A tabela 1.1 indica os fatores de ponderação da freqüência  $p_i$ , nas faixas de um terço de oitava, encontrados em (8). É importante salientar que pesquisas recentes indicam que estes ponderadores devem ser recalculados.

**Tabela 1.1:** Fatores de ponderação da freqüência em faixas de um terço de oitava.

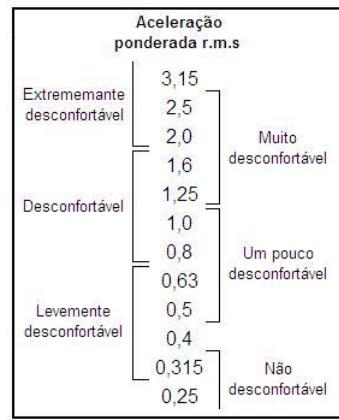
Faixas de um terço de oitava de freqüencia (Hz)	Fator de ponderação da freqüencia (vertical)	Fator de ponderação da freqüencia (horizontal)
1,00	0,5 = -6dB	1,00 = 0dB
1,25	0,56 = -5dB	1,00 = 0dB
1,60	0,63 = -4dB	1,00 = 0dB
2,00	0,71 = -3dB	1,00 = 0dB
2,50	0,8 = -2dB	0,8 = -2dB
3,15	0,9 = -1dB	0,63 = -4dB
4,00	1,00 = 0dB	0,5 = -6dB
5,00	1,00 = 0dB	0,4 = -8dB
6,30	1,00 = 0dB	0,315 = -10dB
8,00	1,00 = 0dB	0,25 = -12dB
10,00	0,8 = -2dB	0,20 = -14dB
12,50	0,63 = -4dB	0,16 = -16dB
16,00	0,5 = -6dB	0,125 = -18dB
20,00	0,4 = -8dB	0,10 = -20dB
25,00	0,315 = -10dB	0,08 = -22dB
31,50	0,25 = -12dB	0,063 = -24dB
40,00	0,20 = -14dB	0,05 = -26dB
50,00	0,16 = -16dB	0,04 = -28dB
63,00	0,125 = -18dB	0,0315 = -30dB
80,00	0,10 = -20dB	0,025 = -32dB

O valor do grau de desconforto em r.m.s. pode ser analisado por uma escala de acordo com a figura 1.1. Nela, podemos ter uma estimativa de quão desconfortável para o ser humano é a situação que está sendo analisada.

De acordo com Griffin (7), estas normas não são baseadas em estudos experimentais e apresentam resultados menos satisfatórios para a estimativa de desconforto. Ele diz que o nível de desconforto tende a variar linearmente com o aumento da amplitude, mas que essa proporção depende da freqüência em questão. Em outras palavras, o expoente  $n$  da lei de Steven é próximo de 1 e depende da freqüência.

A equação 1.3 mostra a Lei de Steven, onde  $\psi$  é a estimativa do desconforto e  $\varphi$  é a amplitude do movimento.

$$\psi = k\varphi^n \quad (1.3)$$



**Figura 1.1:** Escala do grau de desconforto sugerido pela ISO2631 (8).

Griffin também diz que um método mais preciso para quantificar o desconforto é utilizando o valor r.m.q. da aceleração ponderada, ao invés de usar o valor r.m.s. recomendado pelas normas citadas.

$$r.m.q. = \left[ \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} a_w^4(t) dt \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1.4)$$

## 2 Revisão da teoria de sistemas multicorpos

É dado um sistema multicorpos com  $N$  elementos,  $l \cdot N$  variáveis e  $k$  equações de restrições. O primeiro corpo pode ser representado pelas variáveis  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$ , o segundo por  $(x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{2l})$  e assim por diante.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_{lN-k}, t) \\ &\vdots \\ x_{lN} &= x_{lN}(q_1, q_2, \dots, q_{lN-k}, t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Onde  $q_i$  são chamadas variáveis independentes ou generalizadas e  $l \cdot N - k$  é o número de graus de liberdade do sistema.

Neste caso, estamos considerando que as restrições do sistema são holonômicas.

Para essa consideração, define-se uma restrição holonômica aquela que relaciona as coordenadas do sistema com uma função do tipo  $\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, t)$ . Conseqüentemente, o quantidade de coordenadas generalizadas  $q_i$  é igual ao número de graus de liberdade do sistema, além de que elas são independentes entre si (5). Ou seja,

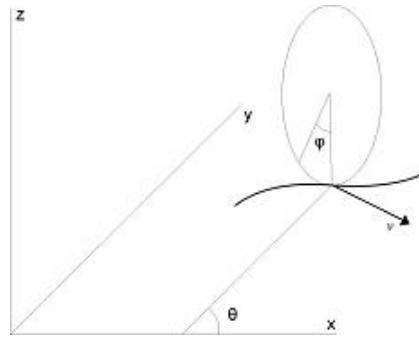
$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = 0 \quad \text{para } i \neq j. \tag{2.2}$$

As restrições que não relacionam as coordenadas do sistema com uma função do tipo  $\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, t)$  são chamadas não holonômicas. Neste caso, existe pelo menos uma coordenada generalizada  $q_i$  tal que

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} \neq 0 \quad \text{para } i \neq j. \tag{2.3}$$

Um exemplo de restrição não holonômica é um disco de espessura desprezível rolando sem escorregar sobre um plano, como mostra a figura 2.1.

O disco tem raio  $r$  e rola no plano  $xy$ , de maneira que a equação de vínculo



**Figura 2.1:** Disco rolando sobre um plano.

será expressa pelas velocidades generalizadas.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \theta \\ \dot{y} &= -r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \theta\end{aligned}\quad (2.4)$$

Conseqüentemente podemos escrever

$$\dot{x} = -\dot{y} \cdot \tan \theta. \quad (2.5)$$

A relação acima não pode ser integrada afim de obter uma equação de vínculo na forma  $\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, t)$ . Também se pode perceber que as coordenadas generalizadas não são independentes entre si, como é mostrado na equação 2.6.

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\tan \theta \quad (2.6)$$

Pelas razões acima citadas, o vínculo em questão é não holonômico.

## 2.1 Método de Lagrange

Para sistema em equilíbrio estático, baseando-se no princípio de deslocamentos virtuais, temos a soma das forças resultantes em um corpo definidas como na equação 2.7.

$$\sum_{corpo} F_j \cdot \delta x_j = \sum_{corpo} (F_j^{(ext)} + f_j) = 0 \quad (2.7)$$

Essas resultantes  $F_j$  são resultado da soma das forças externas  $F_j^{(ext)}$  com as forças de restrições  $f_j$ . Por enquanto ficaremos restritos a sistemas onde o trabalho virtual das forças nas restrições é zero.

Dessa maneira, são definidas as forças generalizadas do sistema (6)

$$Q_i = \sum_{j=1}^{lN} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, l \cdot N - k) \quad (2.8)$$

Assim, o trabalho virtual dessas forças em um deslocamento virtual  $\delta W$  arbitrário e consistente com as equações de restrição é

$$\delta W = \sum_i Q_i \cdot \delta q_i = \sum_i \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (2.9)$$

De onde pode-se concluir que

$$\sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = 0 \quad (2.10)$$

Da equação acima, a afirmação de que o número de variáveis independentes  $q_i$  é igual ao número de graus de liberdade dá o lugar para outra definição: *O número de variáveis independentes  $q_i$  é igual ao número de graus de liberdade se a soma das forças generalizadas em cada corpo, (referentes às restrições que não realizam trabalho) for zero (6) (em outras palavras, se a equação acima for satisfeita).*

O princípio de D'Alembert é definido como

$$\sum_{corpo} (F_j^{(ext)} - p_j) \cdot \delta x_j = 0 \quad (2.11)$$

sendo  $p_j$  a projeção do momento linear do corpo na direção  $x_j$ .

Baseada neste princípio, a equação de Lagrange para sistemas conservativos pode ser apresentada na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L = T - V \quad (2.12)$$

onde T e V são respectivamente as equações das energias cinética e potencial no sistema e

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$com \quad - \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i. \quad (2.13)$$

No entanto, pode-se considerar a equação da energia potencial como uma

equação do tipo

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_{lN-k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{lN-k}, t)$$

$$\text{com } Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (2.14)$$

Isso possibilita escrever a equação de Lagrange na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i \quad (2.15)$$

Onde  $Q'_i$  é a soma das forças generalizadas que não são provenientes de um potencial  $V$ , por exemplo as forças dissipativas.

Por final, pode-se escrever a equação de Lagrange mais generalizada, considerando sistemas com restrições não holonômicas

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i + \sum_{m=1}^k \lambda_m a_{m,i} \quad (2.16)$$

Onde  $\lambda_m$  são chamados multiplicadores de Lagrange e  $a_{m,i}$  dependem das coordenadas generalizadas e do tempo. Dessa maneira,  $\sum \lambda_m a_{m,i}$  é a soma das forças de restrição generalizadas referentes às coordenadas  $q_i$  tal que

$$\sum_i \left( \sum_{m=1}^k \lambda_m a_{m,i} \right) \delta q_i = 0 \quad (2.17)$$

Dessa maneira, a equação de lagrange é uma alternativa mais conveniente de escrever as equações de movimento de um sistema em relação à sua forma original usando leis de Newton. Isso é possível pois trabalha-se com grandezas escalares, como as energias cinética e potencial, em substituição à grandezas vetoriais como forças e acelerações.

É importante mencionar que, no conjunto de forças generalizadas  $Q'_i$ , existe uma classe de forças que são proporcionais à velocidade de seus pontos de aplicação e sempre se opõem ao movimento.

$$F_j = -C_j \cdot \dot{x}_j \quad (2.18)$$

O trabalho virtual da força analisada pode ser representado por

$$\delta W = - \sum_j C_j \cdot \dot{x}_j \delta x_j = - \sum_i \left[ \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{C_j \cdot \dot{x}_j}{2} \right) \right] \delta q_j \quad (2.19)$$

Dessa maneira, chega-se à função de Rayleigh

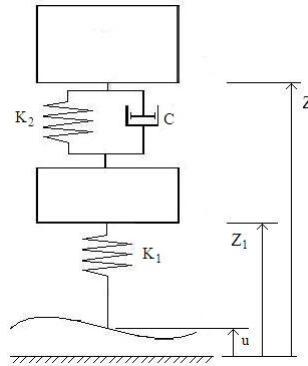
$$R = \sum_j \frac{C_j \cdot \dot{x}_j}{2} \quad (2.20)$$

que nos leva a escrever a força generalizada descrita anteriormente como

$$Q'_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.21)$$

## 2.2 Estudo do sistema

O sistema de um quarto de veículo é útil nos estudos que antecedem a modelagem de sistemas mais elaborados. Dessa maneira é possível observar mais claramente as principais características da suspensão. Este sistema pode ser simplificado para um modelo com dois graus de liberdade de acordo com a figura 2.2.



**Figura 2.2:** Modelo de um quarto de veículo.

As equações de energia cinética e potencial são respectivamente

$$\begin{aligned} T &= \frac{M_2 \cdot \dot{Z}_2^2}{2} + \frac{M_1 \cdot \dot{Z}_1^2}{2} \\ V &= \frac{k_2(Z_1 - Z_2)^2}{2} + \frac{k_1(u - Z_1)^2}{2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

e a Lagrangiana do sistema, de acordo com a definição é

$$L = \frac{M_2 \cdot \dot{Z}_2^2}{2} + \frac{M_1 \cdot \dot{Z}_1^2}{2} - \frac{k_2(Z_1 - Z_2)^2}{2} - \frac{k_1(u - Z_1)^2}{2} \quad (2.23)$$

A força no amortecedor é proporcional às velocidades, portanto a função de

Rayleigh pode ser escrita como na equação 2.24.

$$R = \frac{C(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2)^2}{2} \quad (2.24)$$

Em 2.25, podemos ver os passos intermediários para o cálculo das equações de movimento.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}_1} &= M_1 \cdot \dot{Z}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial Z_1} &= -k_2(Z_1 - Z_2) + k_1(u - Z_1) \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{Z}_1} &= C(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}_2} &= M_2 \cdot \dot{Z}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial Z_2} &= k_2(Z_1 - Z_2) \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{Z}_2} &= -C(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Portanto, as equações de movimento do sistema são como as mostradas em 2.26.

$$\begin{aligned} M_1 \cdot \ddot{Z}_1 + k_2(Z_1 - Z_2) - k_1(u - Z_1) + C(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) &= 0 \\ M_2 \cdot \ddot{Z}_2 - k_2(Z_1 - Z_2) - C(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Essas equações podem ser escritas na forma de matrizes em espaço de estados, como podemos ver em 2.27

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{C}{M_1} & -\frac{K_2}{M_1} & \frac{C}{M_1} & \frac{K_1}{M_1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{C}{M_2} & \frac{K_2}{M_2} & -\frac{C}{M_2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) * \begin{Bmatrix} Z_1 \\ \dot{Z}_1 \\ Z_1 - Z_2 \\ \dot{Z}_2 \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_1 \\ \dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 \\ \ddot{Z}_2 \\ \frac{Z_2}{Z_2} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

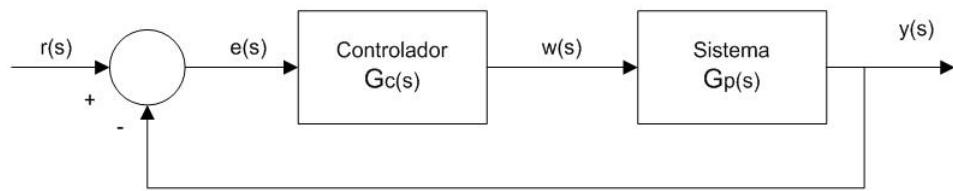
Se o sistema apresentado anteriormente tiver a força do amortecedor controlada por um sinal externo, o sistema de equações pode ser escrito como no sistema linear 2.28.

$$\left( \begin{array}{cccc|cc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{K_1}{M_1} & 0 & -\frac{K_2}{M_1} & 0 & \frac{K_1}{M_1} & 1 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \frac{K_2}{M_2} & 0 & 0 & -1 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) * \begin{Bmatrix} Z_1 \\ \dot{Z}_1 \\ Z_1 - Z_2 \\ \dot{Z}_2 \\ u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_1 \\ \dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 \\ \ddot{Z}_2 \\ Z_2 \\ Z_1 - Z_2 \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

### 3 Controle de vibrações

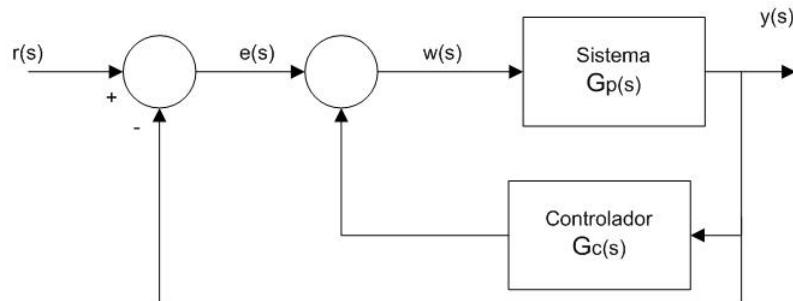
Um sistema com apenas uma variável controlada e uma variável de controle é chamado SISO (single input single output). De acordo com Kuo (10), os tipos de laços de controle mais usados são

a) Compensação em série (cascata): A figura 3.1 mostra a configuração mais comumente usada em aplicações de controle. O controlador fica posicionado em série com o sistema controlado.



**Figura 3.1:** Laço de controle com compensação em série.

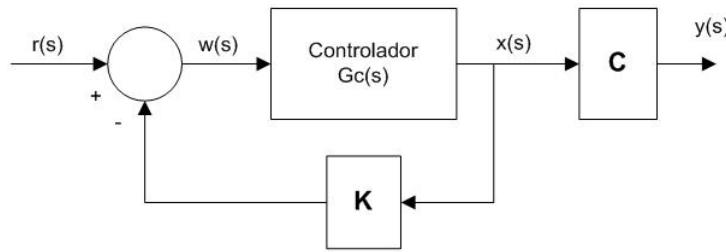
b) Compensação por realimentação: Na figura 3.2, o controlador é alimentado com o sinal de saída (variável de controle) do sistema.



**Figura 3.2:** Laço de controle com compensação por realimentação.

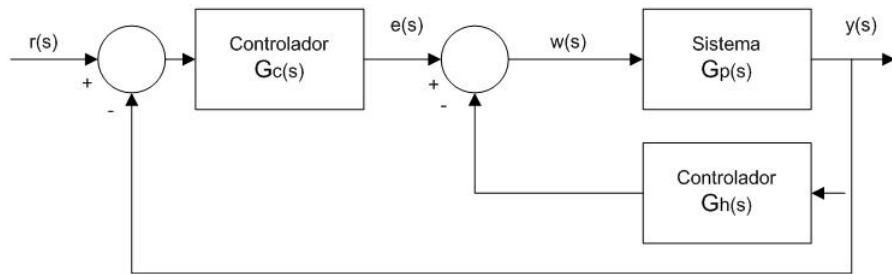
c) Compensação por realimentação de estado: A figura 3.3 mostra um laço de controle onde a realimentação ocorre com o vetor  $X(s)$ , de variáveis de estado do sistema.

d) Compensação por realimentação em série: A figura 3.4 mostra uma con-



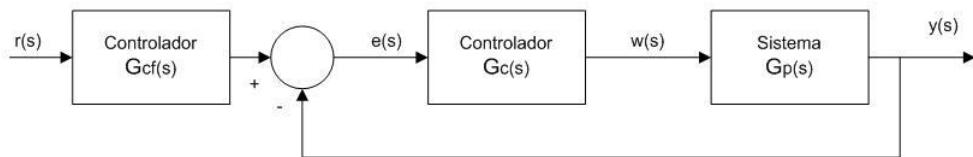
**Figura 3.3:** Laço de controle com compensação por realimentação de estado.

figuração com dois controladores, fazendo com que o laço de controle tenha dois graus de liberdade.

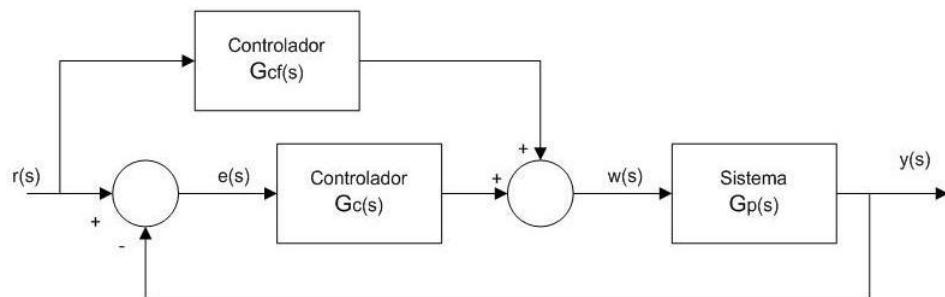


**Figura 3.4:** Laço de controle com compensação por realimentação em série.

e) Compensação com feedforward: Assim como o anterior, possui dois controladores no laço e consequentemente dois graus de liberdade. As figuras 3.5 e 3.6 mostram exemplos de configurações para este tipo de laço de controle.



**Figura 3.5:** Laço de controle com compensação com feedforward.



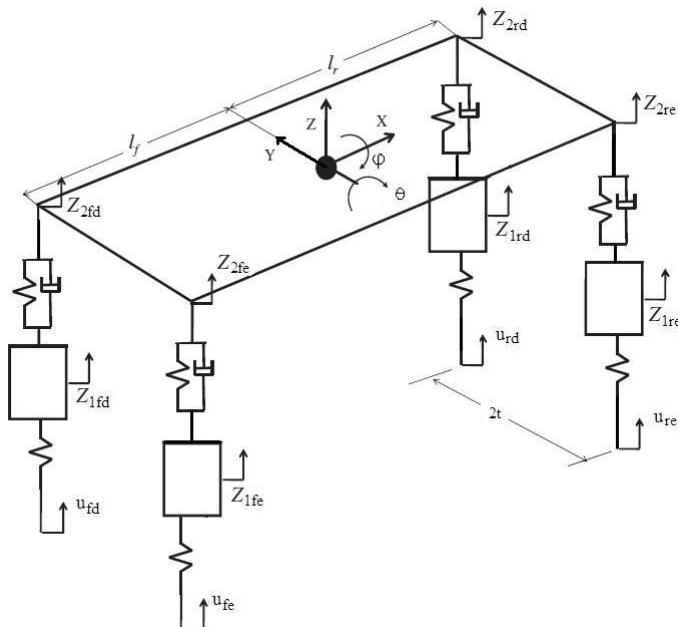
**Figura 3.6:** Laço de controle com compensação com feedforward.

A desvantagem dos laços de controle com um grau de liberdade é que o critério de desempenho do sistema é mais limitado (10). Por exemplo, se o sistema foi projetado para atingir um determinado nível de estabilidade, ele pode ter uma resposta ruim frente a variações nos parâmetros de controle.

Para a aplicação desejada neste trabalho, a realimentação do laço de controle é realizada com medições realizadas em diferentes pontos do carro, que podem ser aceleração, velocidade ou deslocamento, relativos ou absolutos. Essa informação é então processada de acordo com as equações de controle e determinam a força necessária que os atuadores realizam no sistema.

Alguns controladores podem ser mais facilmente implementados se o laço de controle for feito para cada quarto de veículo. Desta maneira, podemos dividir o modelo de veículo completo em quatro subsistemas menores e mais simples. A realimentação do laço de controle vem de medições correspondentes à cada subsistema, porém isso pode exigir uma grande quantidade de sensores no veículo.

Podem existir desvantagens ocasionadas pelo elevado número de sensores no veículo. Isso pode ser facilmente evitado com a implantação de um único sensor responsável por medir o deslocamento vertical do chassi, ângulos de rolagem e de arfagem. As medições dos quatro pontos do chassi podem ser feitas indiretamente usando os valores do sensor, vide equação 3.1 e figura 3.7.



**Figura 3.7:** Modelo de veículo completo com sete graus de liberdade.

$$\begin{pmatrix} 1 & -l_r & -t \\ 1 & -l_r & t \\ 1 & l_f & -t \\ 1 & l_f & t \end{pmatrix} * \begin{Bmatrix} Z \\ \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_{2re} \\ Z_{2rd} \\ Z_{2fe} \\ Z_{2fd} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Abaixo, será analisada a viabilidade de implementação de diferentes tipos de controladores da família PID para um quarto de veículo. Todos os candidados a bons controladores para o sistema serão analisados pelo método do lugar das raízes para garantir a estabilidade do mesmo em malha fechada. Os controladores estudados são:

- Controlador proporcional
- Controlador derivaivo (Skyhook)
- Controlador integral
- Controlador PD
- Controlador PI
- Controlador ID
- Controlador PID

O tipo de modelo analisado com o método do lugar das raízes será o de um quarto de veículo. Esta é uma boa escolha para este estudo pois podemos realizar uma mudança de variáveis no modelo linear de veículo completo, separando os modos controláveis dos não controláveis (16). A equação 3.2 mostra o sistema separado em um vetor estados controláveis  $X_1$  e não controláveis  $X_2$ .

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B \\ 0 & A_{22} & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ y(t) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

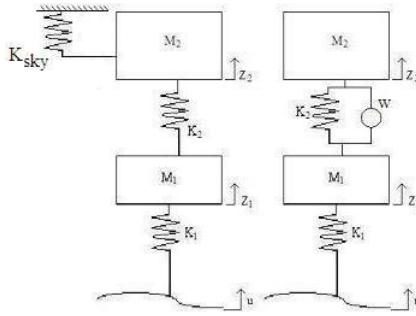
Desta maneira, considerando a controlabilidade do sistema 3.3, estamos estudando toda a parcela controlável do modelo de veículo completo.

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{11} & B \\ \hline C_1 & 0 \end{array} \right) * \left\{ \begin{Bmatrix} X_1 \\ w \end{Bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ y(t) \end{Bmatrix} \right\} \quad (3.3)$$

### 3.1 Controlador proporcional

O controlador proporcional é um dos mais simples que existem na teoria de controle. Sua estratégia consiste em ler o erro do laço fechado de controle e multiplicar por uma constante. O resultado será o sinal de controle para a planta controlada.

Para um sistema de quarto de veículo, o controlador proporcional pode ser esquematizado como na figura 3.8. A força do atuador simula a situação onde o chassi do veículo está fixada em um referencial inercial por meio de uma mola.



**Figura 3.8:** Controlador P ideal (esquerda) e implementado (direita).

Desta maneira, a força no atuador pode ser escrita como na equação 3.4.

$$w = K \cdot Z_2 \quad (3.4)$$

Consequentemente, temos a função de transferência do controlador como na equação 3.5.

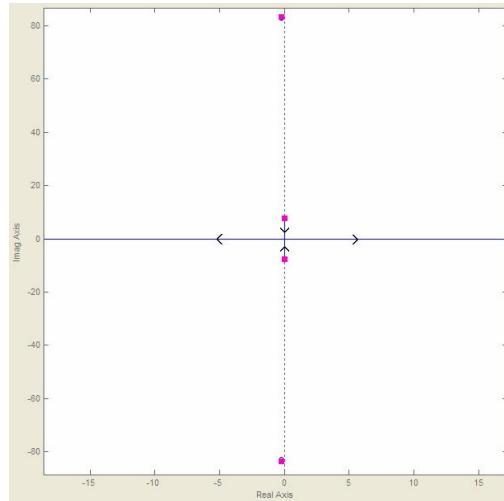
$$C(s) = K \quad (3.5)$$

Utilizando o método do lugar das raízes para estudar a estabilidade do sistema, podemos ver que existem valores de ganho do controlador onde existe instabilidade. Em outras palavras, existem pólos do sistema em malha fechada com parte real positiva, vide figura 3.9. O software usado para este tipo de análise foi o Matlab.

### 3.2 Controlador derivativo (Skyhook)

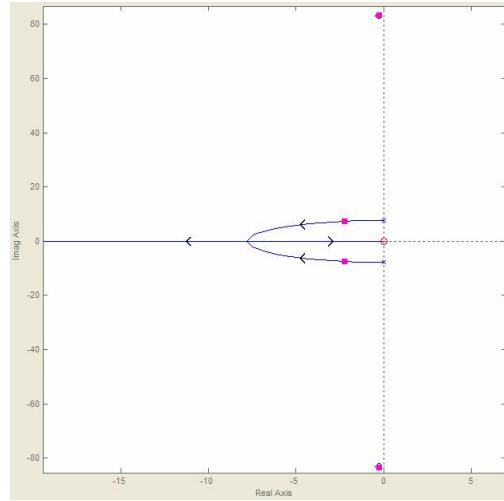
Um dos controladores mais conhecidos e usados em simulações de suspensões veiculares é o skyhook, apresentado inicialmente por Karnopp (9) em 1974.

Utilizando o método do lugar das raízes, podemos ver que o controlador derivativo torna o sistema em malha fechada estável. Os pólos estão localizados



**Figura 3.9:** Lugar das raízes para o sistema com controlador P.

no semi plano esquerdo do gráfico e existe um zero do controlador tendendo a infinito pelo lado negativo (vide figura 3.10).

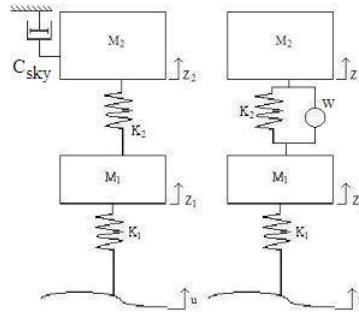


**Figura 3.10:** Lugar das raízes para o sistema com controlador skyhook.

A teoria do amortecimento de skyhook é deduzida a partir de um sistema de massa-mola amortecido. A equação do controlador pode ser encontrada analiticamente para um sistema de dois graus de liberdade, que representa um quarto de veículo.

O princípio do controlador pode ser visto na figura 3.11. A força  $w$  no atuador é definida tal que  $Z_2$  tenha a mesma resposta que se o chassi fosse preso a um referencial inercial por meio de um amortecedor com constante de amortecimento  $C_{sky}$ .

Em 3.6, temos as equações de movimento do sistema com amortecimento



**Figura 3.11:** Amortecimento skyhook ideal (esquerda) e implementado (direita).

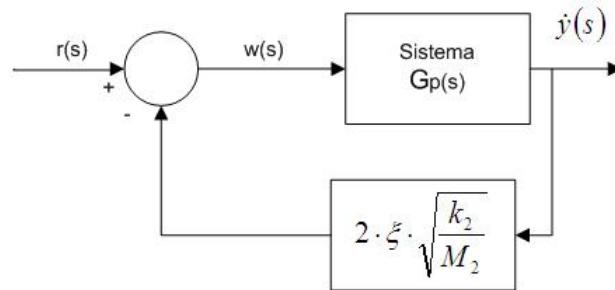
ideal.

$$\begin{aligned} M_1 \cdot \ddot{Z}_1 + k_2(Z_1 - Z_2) - k_1(u - Z_1) &= 0 \\ M_2 \cdot \ddot{Z}_2 - k_2(Z_1 - Z_2) - C_{sky} \cdot \dot{Z}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

A força  $w$  é apresentada de maneira proporcional à massa  $M_2$ , ao fator de amortecimento  $\xi$  e à mola  $k_2$ .

$$\begin{aligned} w &= 2 \cdot \dot{Z}_2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{k_2}{M_2}} \\ C_2 &= \frac{2 \cdot \dot{Z}_2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{k_2}{M_2}}}{\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

O diagrama de blocos pode ser representado como na figura 3.12.

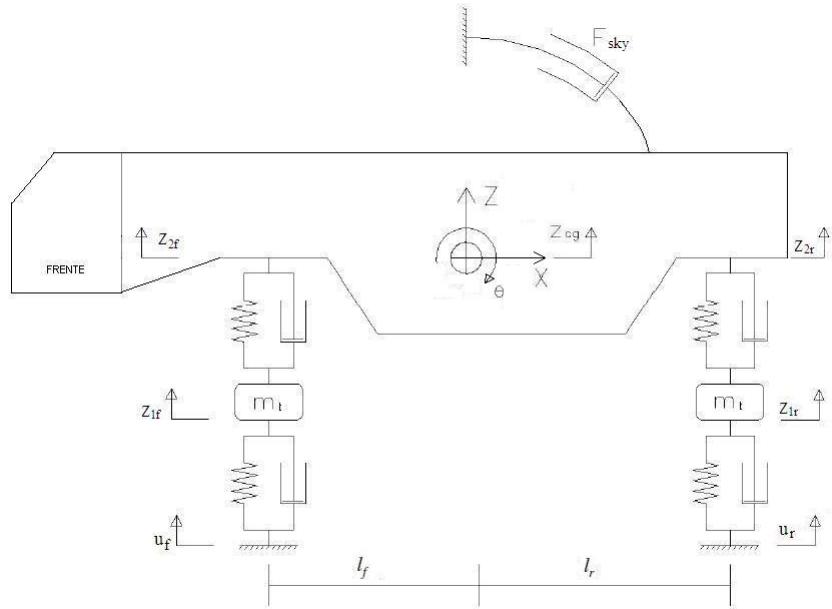


**Figura 3.12:** Laço de controle com controlador de skyhook.

Para o movimento de arfagem do chassi, o amortecedor skyhook pode ser representado como na figura 3.13.

Dessa forma, podemos escrever o torque causado pelo amortecedor preso ao referencial inercial como na equação 3.8.

$$\tau_{sky} = -\dot{\theta}_{cg} \cdot C_\phi \quad (3.8)$$



**Figura 3.13:** Modelo de meio veículo com amortecimento skyhook para arfagem.

Mas se a força nos atuadores forem definidas como na equação 3.7, podemos simular o efeito do amortecedor de skyhook para movimentos de arfagem como é mostrado na equação 3.9. Desta maneira, cada atuador tem teria um sensor associado que tem a função de medir o movimento do ponto de fixação do amortecedor no chassi.

$$\tau_{sky} = -a \cdot \left( 2 \cdot \dot{Z}_{2f} \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{k_{2f}}{M_{2f}}} \right) + b \cdot \left( 2 \cdot \dot{Z}_{2r} \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{k_{2r}}{M_{2r}}} \right) \quad (3.9)$$

Onde os índices f e r indicam variáveis correspondentes à dianteira e traseira do veículo respectivamente. Portanto, o amortecimento  $C_\phi$  pode ser escrito como

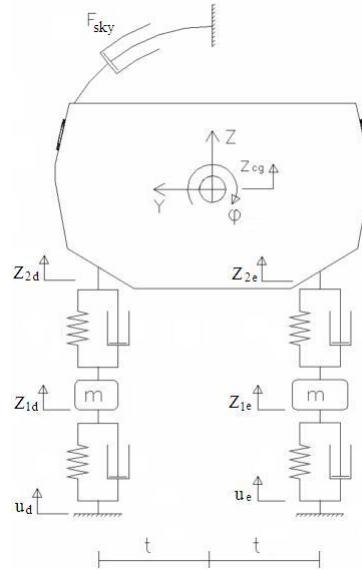
$$C_\phi = 2a^2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{k_{2f}}{M_{2f}}} + 2b^2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{k_{2r}}{M_{2r}}} \quad (3.10)$$

Para o movimento de rolagem do chassi, o amortecedor skyhook pode ser representado como na figura 3.14.

Onde os índices d e e indicam variáveis correspondentes à direita e esquerda do veículo respectivamente.

Analogamente à equação 3.10, podemos escrever o fator de amortecimento como

$$C_\theta = 4t^2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{k_2}{M_2}} \quad (3.11)$$



**Figura 3.14:** Modelo de meio veículo com amortecimento skyhook para arfagamento e rolagem.

Desta maneira, é possível reproduzir o amortecimento de skyhook para arfagamento e rolagem sem a necessidade de realizar medições angulares. Este efeito pode ser alcançado se cada atuador tiver sua força definida pela equação 3.7.

A força de cada um dos quatro atuadores pode ser determinada pela medição de um acelerômetro integrada uma vez. Essa informação é a velocidade  $\dot{Z}_2$  do chassi no ponto imediatamente superior ao amortecedor.

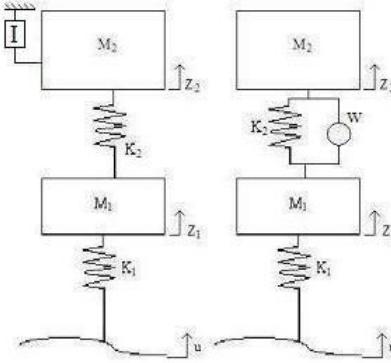
O controlador Skyhook também pode ser implementado de maneira a ser semi-ativo. Desta maneira o amortecedor semi-ativo só atua no sistema se existir movimento relativo entre a roda e o chassi (9).

$$C_2 = \begin{cases} \frac{2 \cdot \dot{Z}_2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\frac{k_2}{M_2}}}{\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2} & \text{se } \dot{Z}_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) > 0 \\ 0 & \text{se } \dot{Z}_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) \leq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

A análise do amortecimento de skyhook para arfagamento e rolagem é análogo para os outros tipos de controladores. Portanto será considerado que se implementarmos o controlador para cada quarto de veículo, podemos considerar que estes movimentos também serão afetados pelo controlador da mesma maneira.

### 3.3 Controlador integral

O controlador integral não é comumente usado em aplicações de controle, entretanto será analisada sua viabilidade para o sistema em questão. O sinal de controle é igual à integral ao longo do tempo do deslocamento do chassi em relação a seu ponto de equilíbrio (vide equação 3.13).

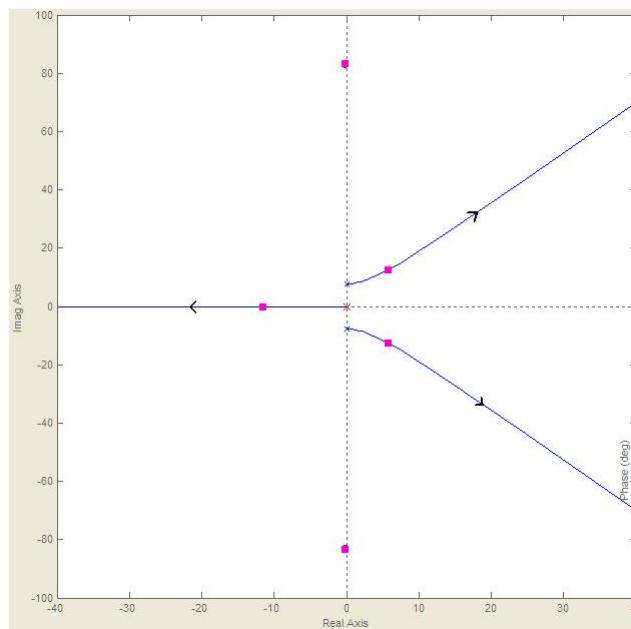


**Figura 3.15:** Controlador I ideal (esquerda) e implementado (direita).

$$w = \int_0^t Z_2 \cdot dt \quad (3.13)$$

Consequentemente, temos a função de transferência do controlador como na equação 3.14.

$$C(s) = \frac{1}{s} \quad (3.14)$$

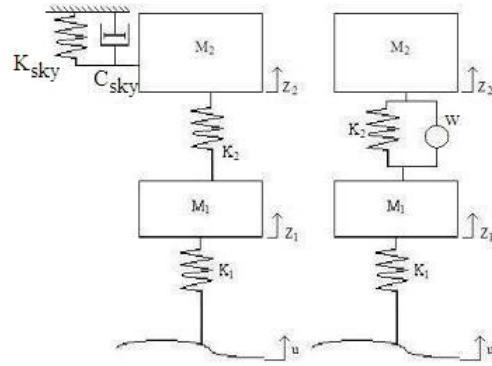


**Figura 3.16:** Lugar das raízes para o sistema com controlador I.

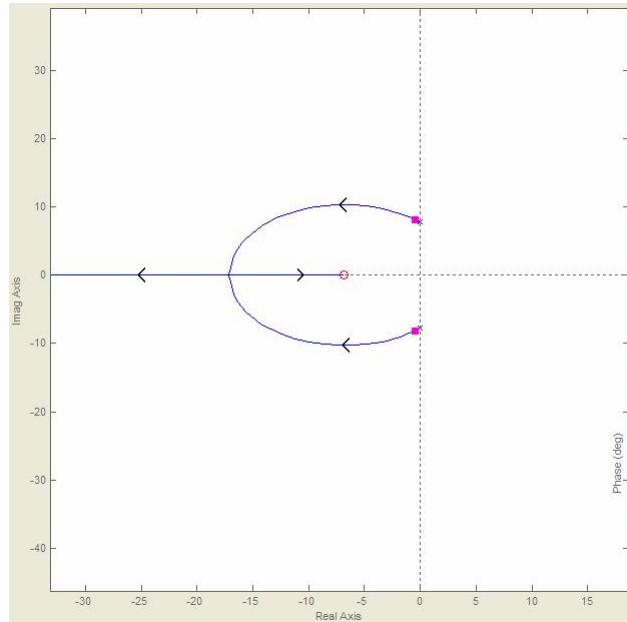
O método do lugar das raízes mostra que os pólos do sistema em malha fechada tem parte real positiva, portanto este controlador não é aconselhado para a aplicação.

### 3.4 Controlador PD

O controlador proporcional e derivativo pode ser idealizado como se houvesse uma mola e um amortecedor presos entre o chassi e um referencial inercial (vide figura 3.17). Apesar de ser uma solução combinada entre duas das anteriormente mostradas, a estabilidade do sistema em malha fechada pode mudar drasticamente.



**Figura 3.17:** Controlador PD ideal (esquerda) e implementado (direita).



**Figura 3.18:** Lugar das raízes para o sistema com controlador PD.

O sinal de controle do controlador PD é descrito de acordo com a equação

3.15

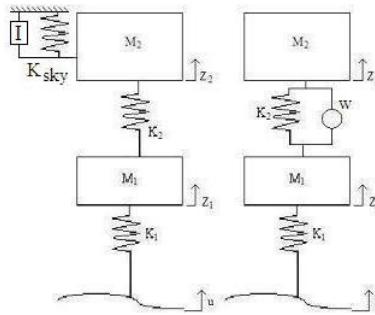
$$w = K \cdot Z_2 + C_{sky} \cdot \dot{Z}_2 \quad (3.15)$$

Consequentemente, temos a função de transferencia do controlador como na equação 3.16.

$$C(s) = K + T_d \cdot s \quad (3.16)$$

### 3.5 Controlador PI

O controlador proporcional integral é uma combinação entre duas das soluções apresentadas anteriormente. A força no atuador simula a situação que o chassi está preso ao referencial inercial por meio de uma mola e de um elemento que exerce uma força que é equivalente à do controlador integral (vide equação 3.17).



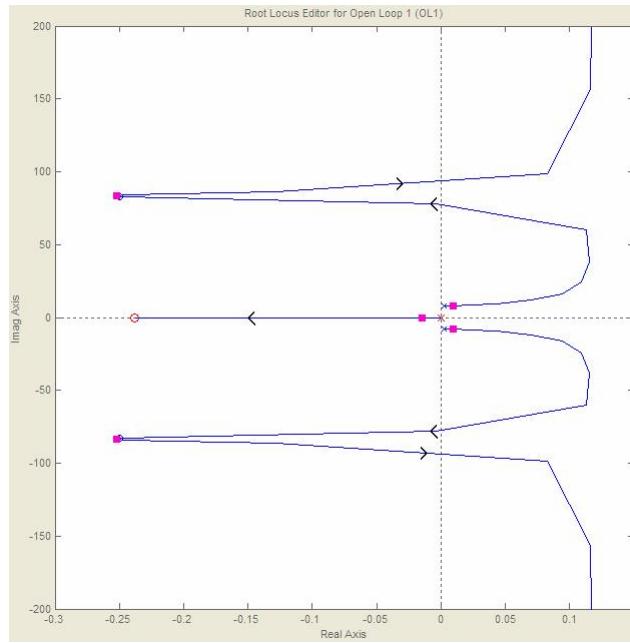
**Figura 3.19:** Controlador PI ideal (esquerda) e implementado (direita).

$$w = K \cdot Z_2 + \int_0^t Z_2 \cdot dt \quad (3.17)$$

Consequentemente, temos a função de transferencia do controlador como na equação 3.18.

$$C(s) = \frac{K \cdot s + T_i}{s} \quad (3.18)$$

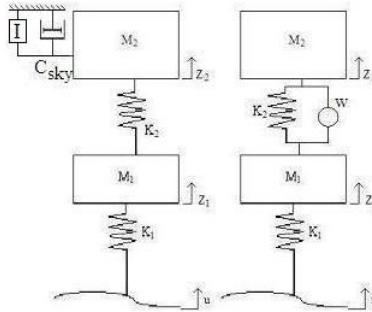
O controlador proporcional integral é conhecido por ser uma solução conservadora se tratando de projetos de controle. Entretanto, como podemos ver na figura 3.20 para o sistema em questão ele é instável.



**Figura 3.20:** Lugar das raízes para o sistema com controlador PI.

## 3.6 Controlador ID

O controlador integral derivativo é a implementação da força que seria causada por um amortecedor (como no skyhook) e um elemento como o do controlador integral (vide figura 3.21).



**Figura 3.21:** Controlador ID ideal (esquerda) e implementado (direita).

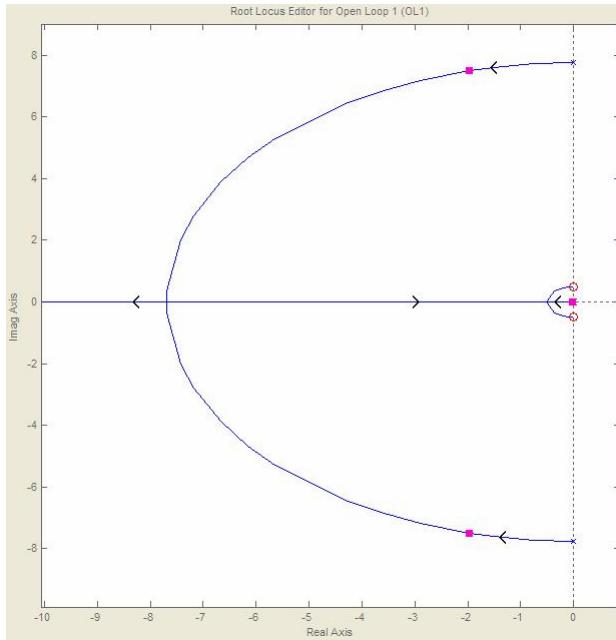
A equação do atuador tem uma parcela proporcional à velocidade de chassis e outra proporcional à integral do deslocamento do mesmo em relação ao ponto de equilíbrio.

$$w = C_{sky} \cdot \dot{Z}_2 + \int_0^t Z_2 \cdot dt \quad (3.19)$$

Consequentemente, temos a função de transferência do controlador como na equação 3.20.

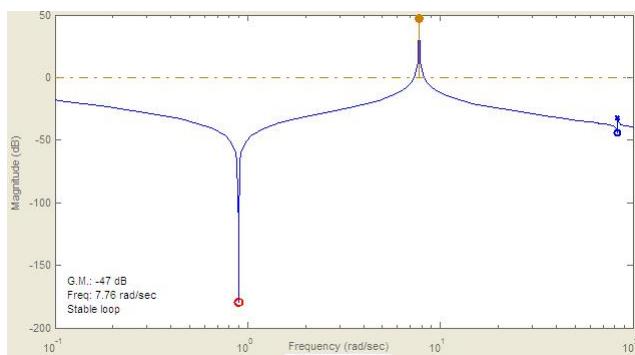
$$C(s) = \frac{T_d \cdot s^2 + T_i}{s} \quad (3.20)$$

O sistema em malha fechada somente é estável quando o ganho é grande o suficiente para tirar os pólos do semi plano esquerdo. Entretanto, o ganho necessário para que isso ocorra é muito grande para o sistema em questão.



**Figura 3.22:** Lugar das raízes para o sistema com controlador ID.

Apesar de ser um controlador que deixa o sistema estável em malha fechada, O ID não é um bom filtro de altas frequencias (vide figura 3.23). Como esta é uma característica essencial para um sistema de suspensão veicular, ele não será implementado neste trabalho.

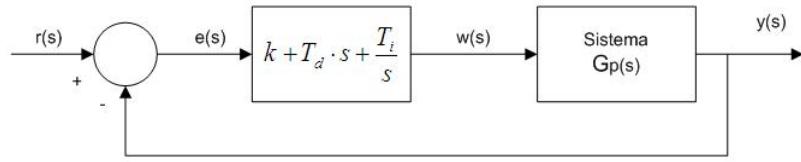


**Figura 3.23:** Resposta em frequencia do deslocamento  $Z_2$  com controlador ID.

## 3.7 Controlador PID

Este controlador é uma combinação do proporcional, integral de derivativo. Essa característica o faz um dos mais usados em aplicações industriais e pode ser

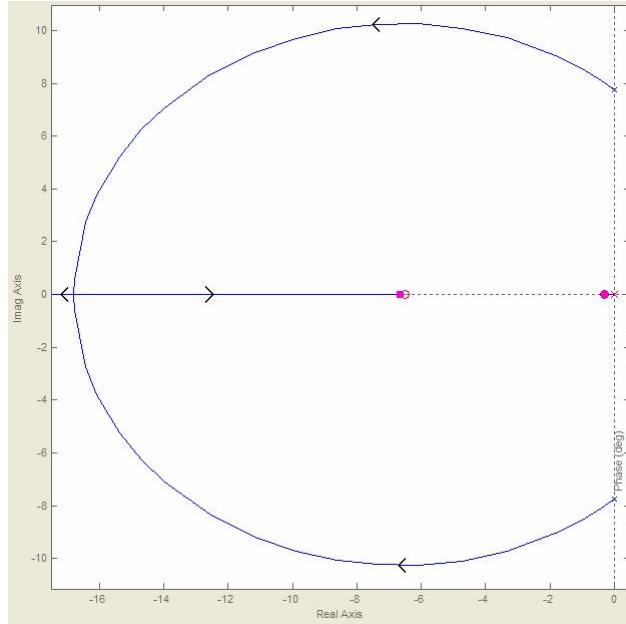
representado como na figura 3.24. Ele é conhecido por apresentar resultados satisfatórios em muitas das aplicações de sistemas de controle no dia a dia.



**Figura 3.24:** Laço fechado com controlador PID.

A força no atuador é definida pela equação 3.21.

$$w = C_{sky} \cdot \dot{Z}_2 + \int_0^t Z_2 \cdot dt + K \cdot Z_2 \quad (3.21)$$



**Figura 3.25:** Lugar das raízes para o sistema com controlador PID.

Consequentemente, temos a função de transferência do controlador como na equação 3.22.

$$C(s) = \frac{T_d \cdot s^2 + K \cdot s + T_i}{s} \quad (3.22)$$

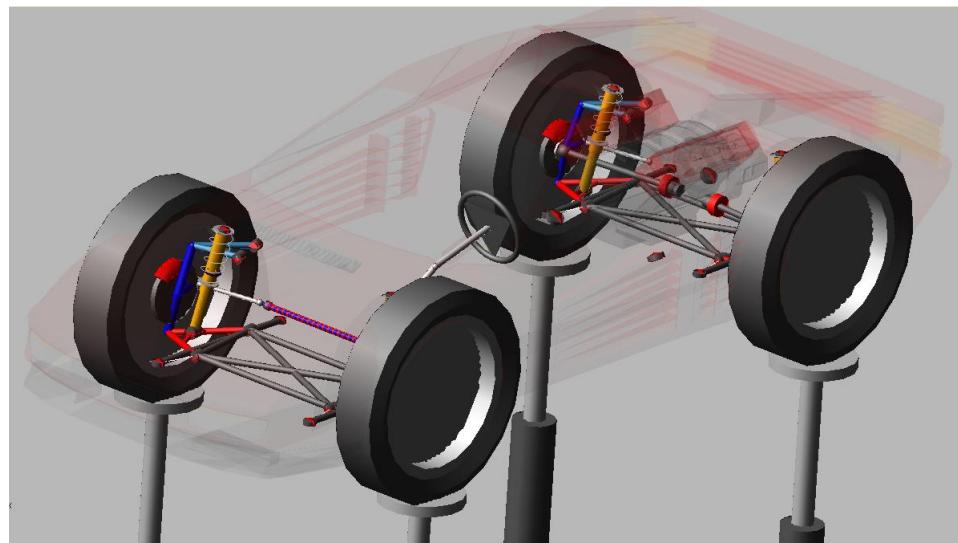
## 4 Modelo de veículo completo

As características do veículo, como massas do chassi e rodas, rigidez e amortecimento das suspensões foram calculadas para um veículo de passeio médio e estão indicadas na tabela 4.1.

**Tabela 4.1:** Dados de um quarto de veículo

Características	Chassi	Roda	Proporção
Massa	280 kg	30 kg	10.7% (10 a 15%)
Rigidez	18500 N/m	190000 N/m	10 (5 a 10)
Amortecimento	1850 Ns/m	190 Ns/m	10% (5 a 10%)

Foi construído um modelo de veículo completo em software de análise de multicorpos. A justificativa de utilizar este tipo modelo é a necessidade de observar e analisar fenômenos que não são considerados em modelos simplificados, comumente utilizados para este tipo de análise. Esses fenômenos podem ser a influência da não linearidade causada pela geometria do mecanismo de suspensão, influência de modos não controláveis como os das buchas, contato com a pista considerando a curvatura do pneu, entre outros.



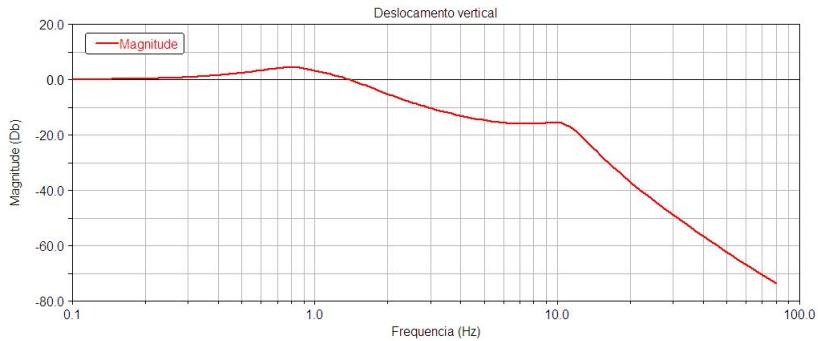
**Figura 4.1:** Modelo de veículo completo em software de multicorpos

## 4.1 Resposta em freqüência do modelo

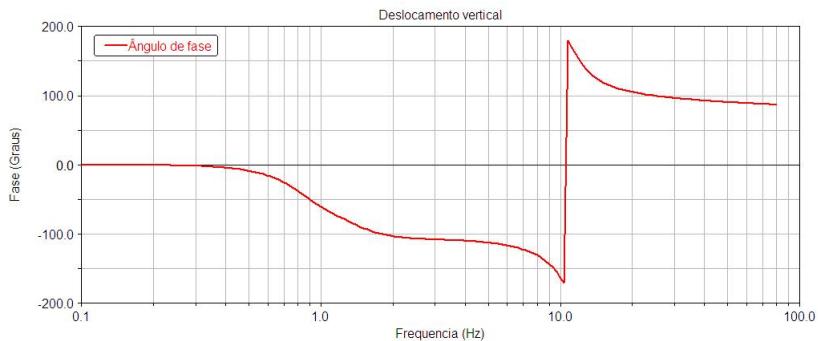
A resposta em frequência do modelo de veículo completo foi calculada usando, como entrada, o deslocamento vertical dos pontos de contato de cada roda com o piso.

O método utilizado foi a linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio, usando como referência uma entrada senoidal no deslocamento de cada roda independentemente. Para cada saída do sistema, encontramos portanto, quatro curvas no domínio da freqüência: uma para cada roda.

Pelo princípio da sobreposição, podemos concluir que a resposta em cada variável de saída do sistema é a soma das respostas de cada variável de entrada.



**Figura 4.2:** Diagrama de Bode do movimento vertical do chassi - Magnitude



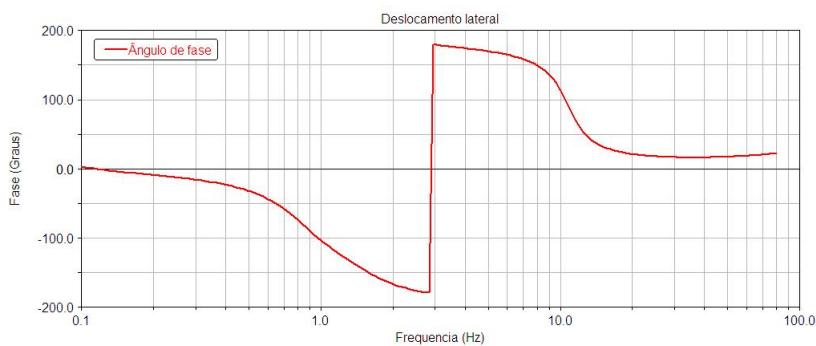
**Figura 4.3:** Diagrama de Bode do movimento vertical do chassi - ângulo de fase

## 4.2 Pólos do sistema

Os pólos do sistema linearizado são os autovalores que representam cada modo normal de vibração do veículo. A tabela 4.2 mostra os sete primeiros pólos do



**Figura 4.4:** Diagrama de Bode do movimento lateral do chassi - Magnitude



**Figura 4.5:** Diagrama de Bode do movimento lateral do chassi - Ângulo de fase

sistema e as respectivas frequências de ressonância. Esse pólos também estão representados de forma gráfica nas figuras 4.10 e 4.11.

Foram implementadas cinco estratégias diferentes de controle de vibrações no modelo de veículo completo apresentado.

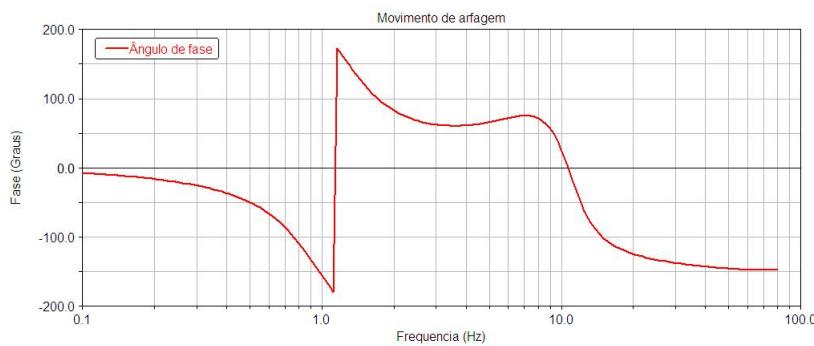
- Sistema passivo convencional
- Sistema ativo Skyhook
- Sistema semi ativo Skyhook
- Sistema ativo PID
- Sistema semi ativo PID

**Tabela 4.2:** Pólos do sistema

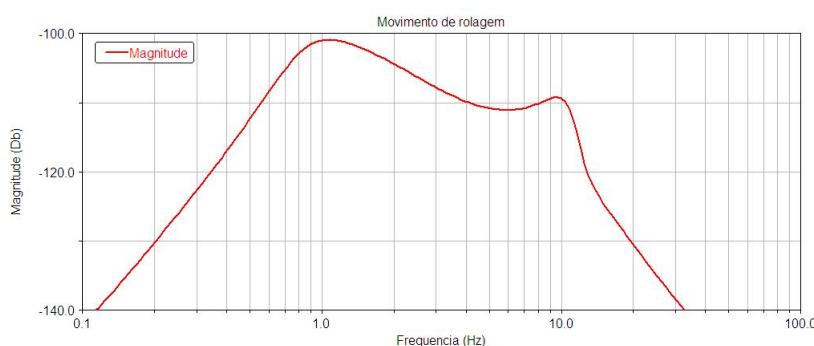
Modo	Frequência não amortecida (Hz)	Fator de amortecimento	Frequência amortecida (Hz)	Real	Imaginário
1	0,85	0,35	0,79	-0,30	+/- 0,79
2	1,33	0,35	1,24	-0,47	+/- 1,24
3	1,82	0,63	1,42	-1,15	+/- 1,42
4	5,90	0,44	5,28	-2,62	+/- 5,28
5	6,40	0,44	5,75	-2,80	+/- 5,75
6	6,56	0,28	6,30	-1,82	+/- 6,30
7	6,67	0,27	6,42	-1,80	+/- 6,42



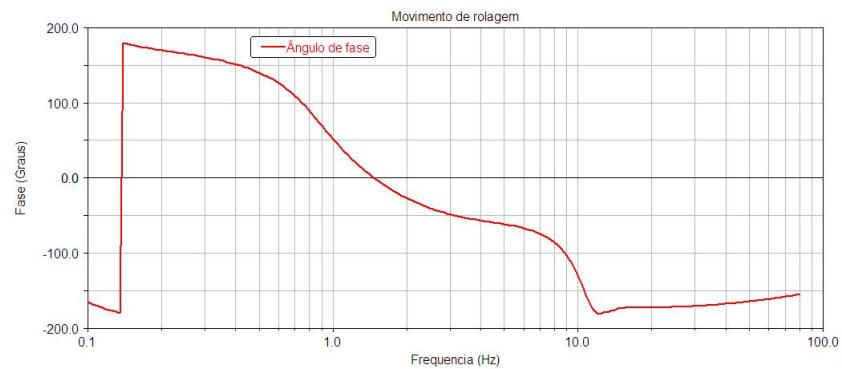
**Figura 4.6:** Diagrama de Bode do movimento de arfagem do chassi - Magnitude



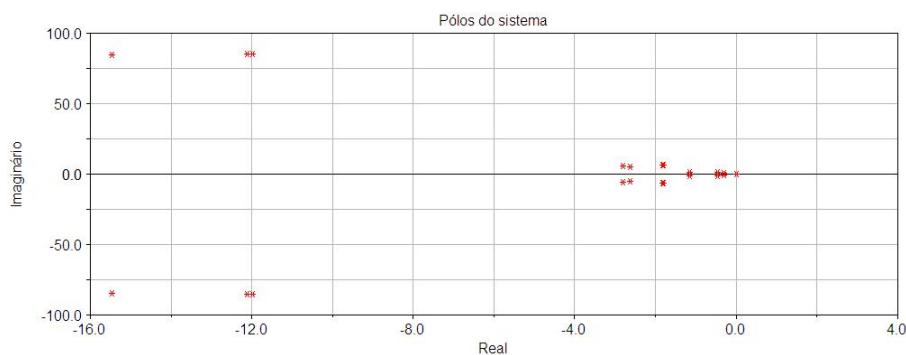
**Figura 4.7:** Diagrama de Bode do movimento de arfagem do chassi - Ângulo de fase



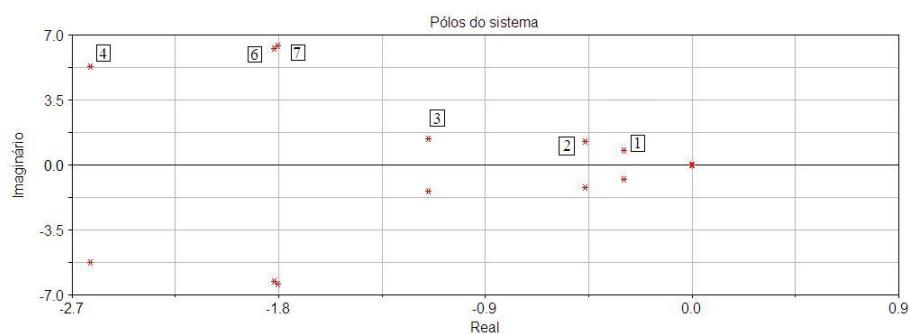
**Figura 4.8:** Diagrama de Bode do movimento de rolagem do chassi - Magnitude



**Figura 4.9:** Diagrama de Bode do movimento de rolagem do chassi - Ângulo de fase



**Figura 4.10:** Pólos do sistema

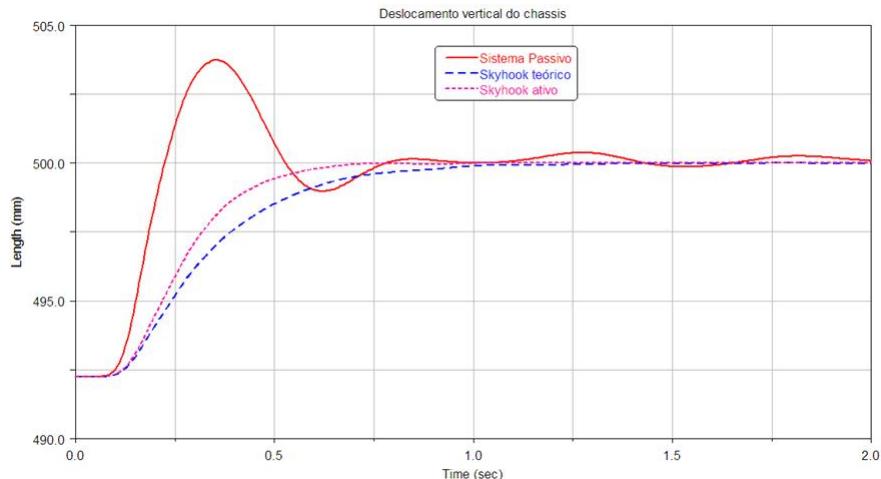


**Figura 4.11:** Pólos do sistema (detalhe)

# 5 Resultados

Para a avaliação do desempenho do controlador skyhook implementado, foi realizada uma simulação com um degrau de 30mm na roda dianteira esquerda. Os modelos simulados foram o com a suspensão passiva, ativa e o modelo de skyhook ideal.

Esta é uma avaliação de quanto o controlador implementado se aproxima do ideal. A resposta do modelo ideal representa a melhor situação possível que um sistema que utiliza um controlador tipo skyhook poderia ter.

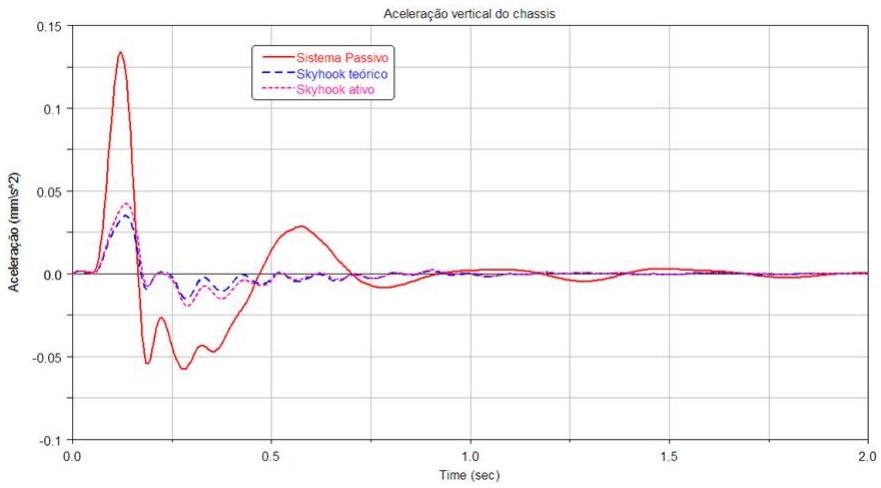


**Figura 5.1:** Deslocamento vertical do centro de massa do chassis

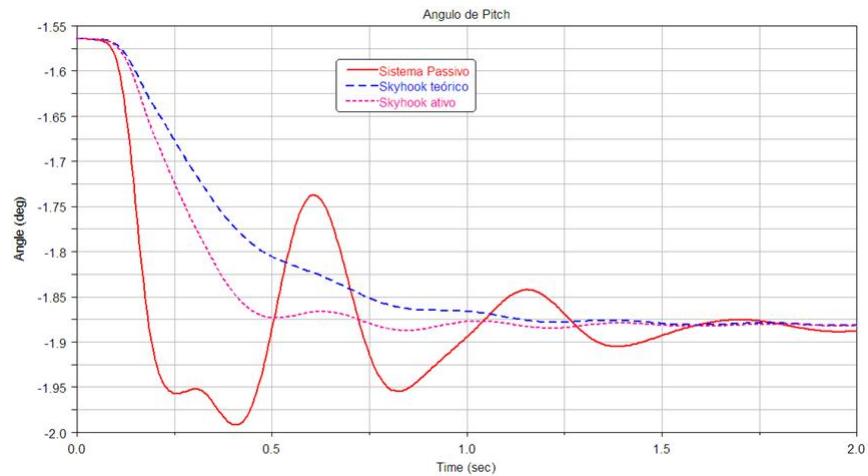
## 5.1 Índice de conforto

Foram realizadas duas simulações com entrada degrau no ponto de contato entre o pneu esquerdo e a pista. Porém foi feita uma suavização dessa função para evitar problemas de convergência numérica do software. Essa suavização elimina a descontinuidade da função degrau com um polinônio de terceiro grau, vide figura 5.5. Nas simulações realizadas, a diferença  $t_1 - t_2$  é suficientemente pequena para que a entrada seja considerada um degrau na prática (0,1 segundo).

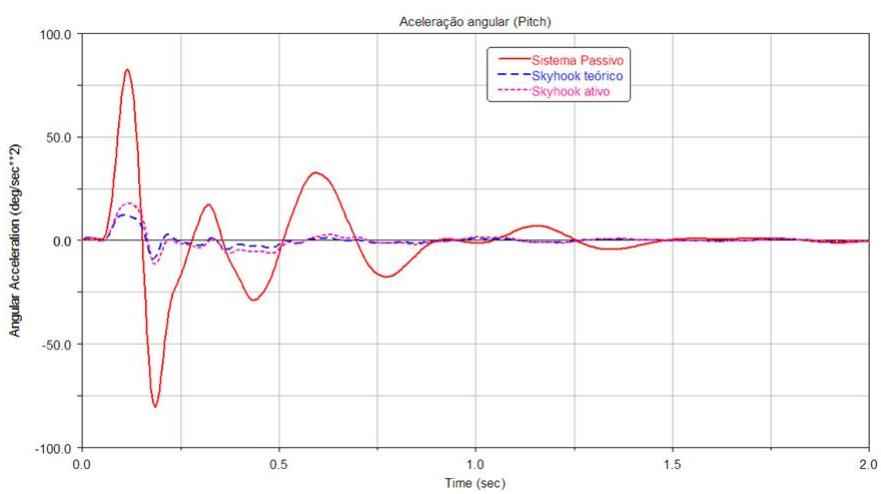
A terceira simulação realizada foi a de uma entrada pulso suavisada, com



**Figura 5.2:** Aceleração vertical do centro de massa do chassi

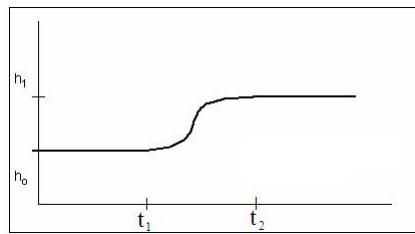


**Figura 5.3:** Deslocamento lateral do centro de massa do chassi

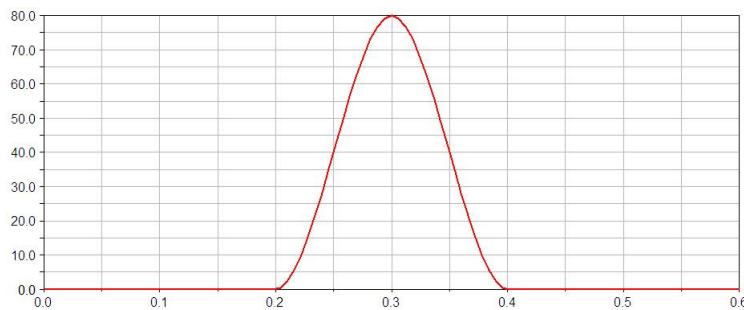


**Figura 5.4:** Aceleração lateral do centro de massa do chassi

amplitude 80mm e duração de 0,2 segundos (vide figura 5.6).

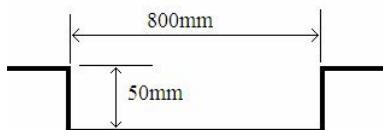


**Figura 5.5:** Suavização da curva de entrada degrau do sistema



**Figura 5.6:** Suavização da curva de entrada tipo pulso no sistema

Todas as simulações citadas anteriormente foram realizadas com o veículo sobre quatro atuadores que simulam as perturbações no sistema causadas pela pista. Porém, uma situação mais compatível com a realidade foi reproduzida colocando o carro sobre uma pista plana, com velocidade de 70Km/h. Nesta pista, um obstáculo foi colocado representando um buraco, cujas dimensões estão indicadas na figura 5.7.



**Figura 5.7:** Dimensões do buraco na simulação com veículo em movimento.

O índice de conforto foi calculado para as cinco estratégias de controle implementadas em diferentes simulações. As tabelas 5.1 e 5.2 mostram as simulações realizadas e os índices de conforto verticais e laterais respectivamente (de acordo com a norma ISO2631 (8)).

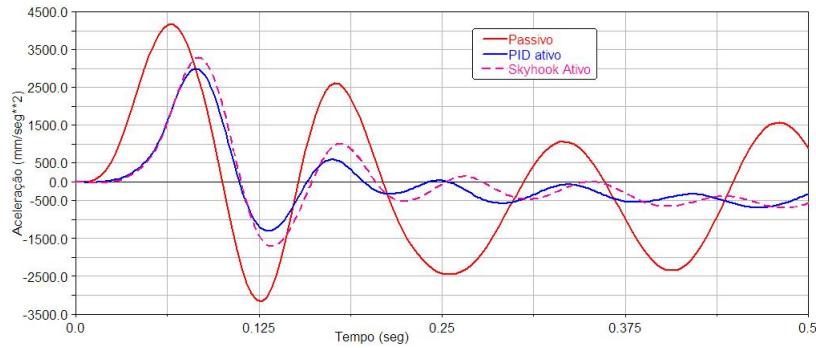
As figuras 5.8 e 5.9 mostram a aceleração do assento do motorista para uma entrada degrau. Devido ao número de curvas a serem comparadas, elas foram divididas em dois grupos para melhor visualização. Analogamente, as figuras 5.10 mostram a aceleração lateral do assento do motorista para a mesma simulação.

**Tabela 5.1:** Índice de conforto para diferentes simulações e controladores (vertical)

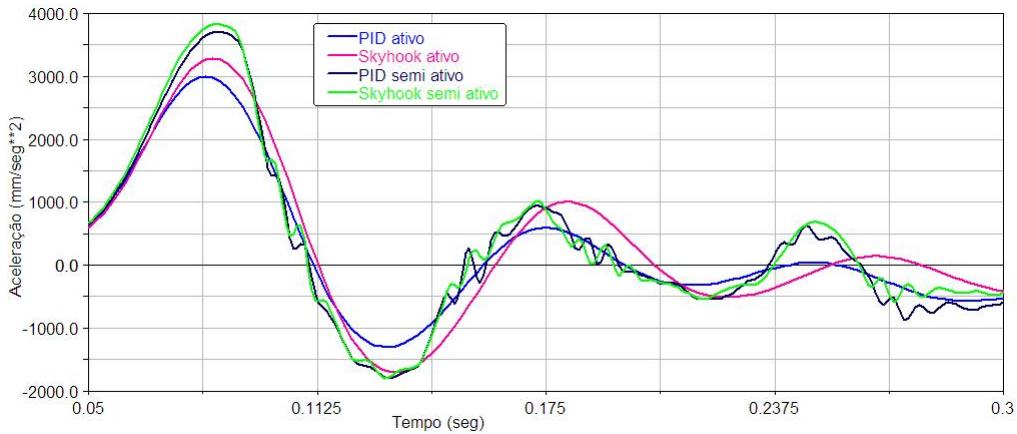
Entrada	amplitude	Passivo	Skyhook	Skyhook semi ativo	PID	PID semi ativo
Degrau	80mm	0.78	0.27	0.27	0.22	0.29
Degrau	-80mm	0.85	0.32	0.34	0.33	0.38
Pulso 0.2s	80mm	1.43	0.34	0.38	0.32	0.38
Buraco	50mm	0.57	0.1	0.17	0.05	0.07

**Tabela 5.2:** Índice de conforto para diferentes simulações e controladores (lateral)

Entrada	amplitude	Passivo	Skyhook	Skyhook semi ativo	PID	PID semi ativo
Degrau	80mm	0.46	0.28	0.315	0.311	0.37
Degrau	-80mm	0.555	0.29	0.3	0.31	0.37



**Figura 5.8:** Aceleração vertical do assento do motorista para entrada degrau.

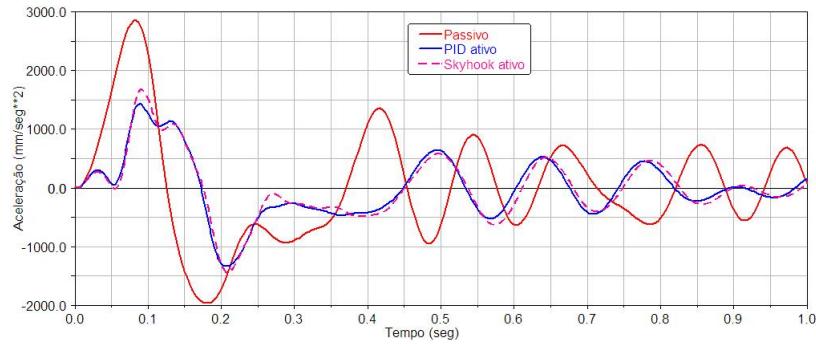


**Figura 5.9:** Aceleração vertical do assento do motorista para entrada degrau.

## 5.2 Energia gasta pelos sistemas ativos

Outro dado importante para ser analisado é a energia que foi gasta pelos atuadores dos sistemas ativos implementados. Estes dados estão apresentados na tabela 5.3.

As figuras 5.11 e 5.12 mostram a força nos atuadores dianteiros e traseiros respectivamente das suspensões ativas. Esses dados foram obtidos mediante a

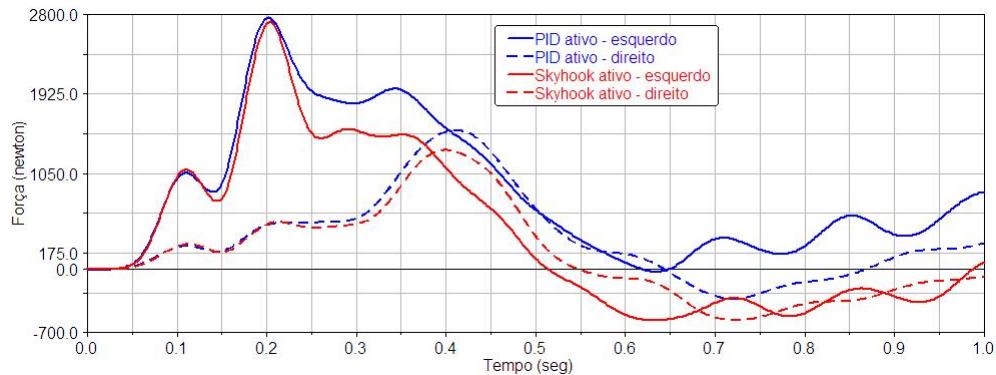


**Figura 5.10:** Aceleração lateral do assento do motorista para entrada degrau.

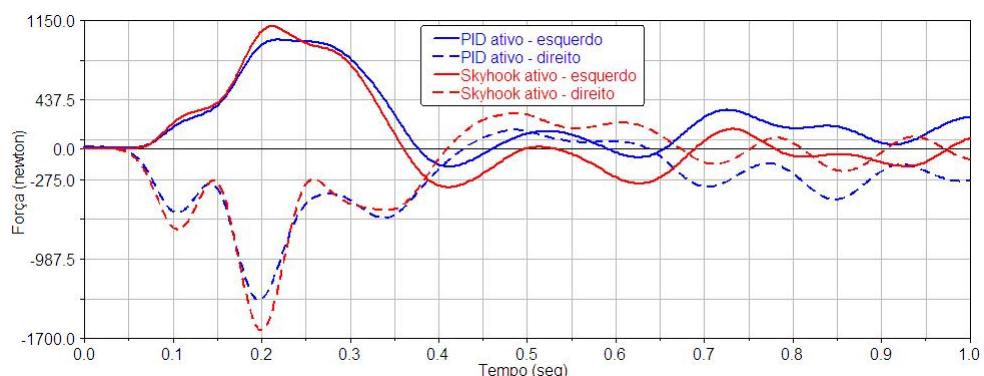
**Tabela 5.3:** Energia gasta pelos atuadores durante a simulação.

Entrada	amplitude	Skyhook	PID
Degrau	80mm	63.2	70.2
Degrau	-80mm	92.9	96.7
Pulso 0.2s	80mm	69	59.6

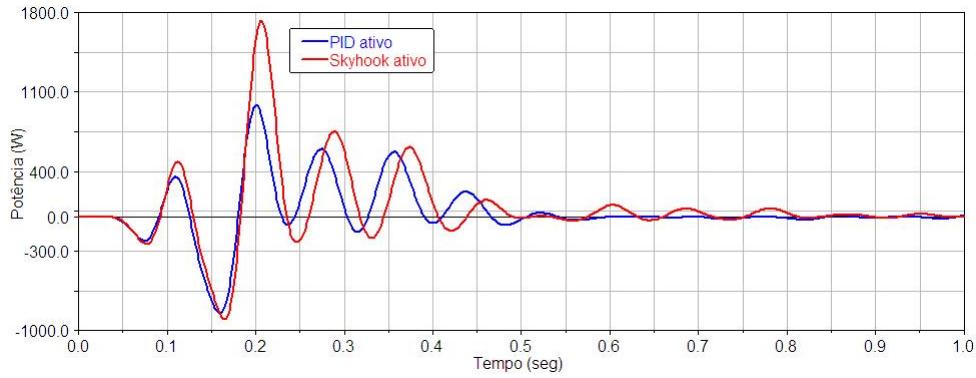
entrada pulso de 80mm no pneu dianteiro esquerdo. Para a mesma simulação, a figura 5.13 mostra a potência do atuador dianteiro esquerdo.



**Figura 5.11:** Força nos atuadores dianteiros (entrada pulso 80mm).



**Figura 5.12:** Força nos atuadores traseiros (entrada pulso 80mm).

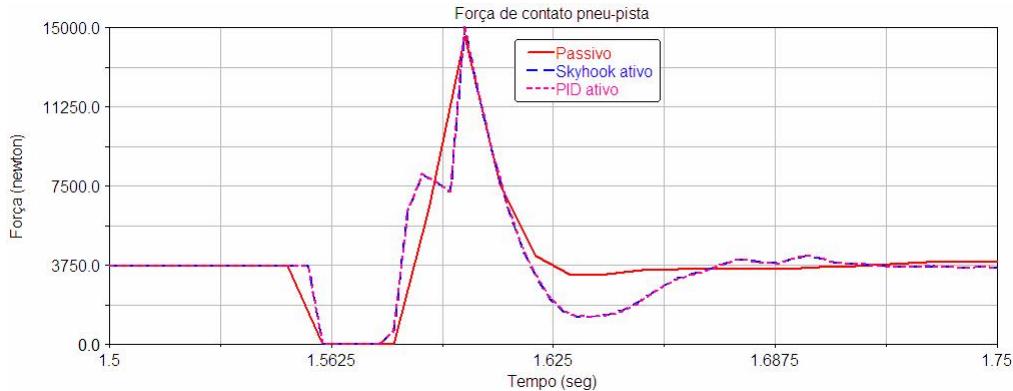


**Figura 5.13:** Potência no atuador dianteiro esquerdo (entrada pulso 80mm).

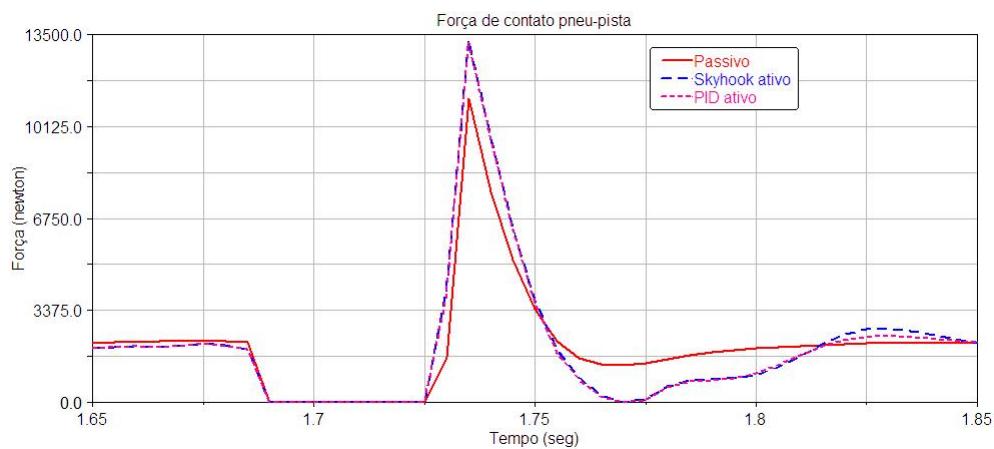
### 5.3 Força de contato pneu-pista

A força de contato entre o pneu e a pista é um fator importante para ser analisado pois está diretamente ligado à aderência do veículo durante as manobras (12). Embora o objetivo deste trabalho não seja estudar a manobrabilidade, o estudo da dinâmica vertical tem grande relevância na segurança do veículo ao influenciar na sua aderência com a pista.

Podemos ver nas figuras 5.14 e 5.15 a força de contato entre os pneus e a pista com buraco (simulação com o veículo em movimento). Não foram mostrados os gráficos de todos os pneus pois eles são semelhantes.



**Figura 5.14:** Força de contato entre o pneu dianteiro esquerdo e a pista.



**Figura 5.15:** Força de contato entre o pneu traseiro direito e a pista.

## 6 Conclusões

Com o modelo de veículo completo foi possível realizar uma análise mais completa da dinâmica do veículo. Observou-se, em um único modelo, fenômenos como a influência da não linearidade causada pela geometria do mecanismo de suspensão, influência de modos não controláveis como os das buchas, contato com a pista considerando a curvatura do pneu, entre outros.

Utilizando o método do lugar das raízes, vemos que somente alguns dos candidatos a controladores são estáveis se a variável de controle for o deslocamento vertical do chassi. Os controladores estáveis são: derivativo (skyhook), PD, ID e PID. Porém foi mostrado na figura 3.23 que o controlador ID não é um bom filtro para altas frequencias (característica essencial para um sistema de suspensão veicular).

O controlador skyhook implementado no veículo apresentou um comportamento próximo ao da resposta do chassi preso ao referencial inercial por um amortecedor. Esta característica era esperada, porém foi alcançada com grande proximidade do caso teórico, ou seja, o melhor caso possível.

No modelo de veículo completo, a suspensão ativa com os controladores ativos propostos alcançaram melhores resultados se comparados à suspensão passiva em todos os parâmetros analisados. Porém o desempenho dos sistemas semi ativos implementados foi muito semelhante ao dos ativos.

Também podemos observar que o grau de conforto do controlador com estratégia PID é ligeiramente melhor que o skyhook. O gasto de energia pelos atuadores do sistema PID ativo foi maior que o skyhook em algumas simulações.

Foi constatado que os sistemas ativos influenciam bastante na força de contato entre os pneus e a pista. Pode-se observar na figura 5.15 que o pneu está na iminência de perder contato com a pista, o que é indesejado no sistema. Neste caso, é recomendado um estudo mais detalhado com foco neste tópico, como o realizado por Neto e Barbosa em (12).

# Referências

- 1 British Standards Institution, 1987, **Measurement and evaluation of human exposure to whole-body mechanical vibration and repeated shock**, British Standard, BS 6841
- 2 Chaffin, D.B., Andersson, G.B.J., Martin, B.J., **Biomecânica Ocupacional**, Editora Ergo, 2001
- 3 Du,H. Zhang,N. **Designing  $H_\infty/GH_2$  static-output feedback controller for vehicle suspensions using linear matrix inequalities and genetic algorithms**, Vehicle System Dynamics, vol. 46, n. 5, p. 385-412, 2008
- 4 ElBeheiry, E.M. **Two tracking control problems applied to damping nonlinear vehicle vibrations**, Journal of Sound and Vibration, 2008
- 5 Goldstein, H, **Classical Mechanics**, Addison-Wesley Publishing Company, 1964.
- 6 Greenwood, D.T., **Principles of Dynamics**, Prentice Hall, 1965.
- 7 Griffin, M.J. **Discomfort from feeling vehicle vibration**, Vehicle System Dynamics, vol. 45, p. 679-698, 2007.
- 8 International Organization for Standardization, **Mechanical vibration and shock - evaluation of human exposure - to whole-body vibration**, Part 1: General requirements. International Standard, ISO 2631-2, Second edition, Corrected and printed 1997-07-15.
- 9 Karnopp, D.C., Crosby, M.J. & Harwood, R.A. **Vibration control using semi-active force generators**, Transactions of the ASME, Journal of engineering for industry, 1974, p. 619-626.
- 10 Kuo, B.C., **Automatic Control Systems**, seventh edition, Prentice Hall, 1995.
- 11 Mammar, S. **Application of two-Degree-of-freedom  $H_\infty$  optimization to Robust Lateral Vehicle Control**, Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications, Hartford, Outubro 1997
- 12 Neto, A.C. Barbosa, R.S. **Safety Vehicle Traffic Speed Limit**, IX International Symposium on Dymanic Problems of Mechanics, 2001
- 13 Park, J.H., Kim, Y.M. **An  $H_\infty$  Controller for active suspensions and its Robustness**, Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications, Hartford, October 1997
- 14 Ray, L.R. **Robust Linear-Optimal control laws for active suspension systems**, Journal of dynamic systems, measurement, and control, vol. 144, p. 592-598, 1992

- 15 Ramírez-Mendonza, R.A. Drivet,A. Menéndez,R.M. Vassal,C.P. Sename,O. Dugard,L. **Virtual Prototyping for Vehicle Dynamics and Control**, Proceedings of virtual concept, 2006
- 16 Rugh, W J **Linear System Theory**, Second Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996
- 17 Wang, F. e Su, W. **Impact of inerter nonlinearities on vehicle suspension control**, Vehicle System Dynamics, vol. 46, n. 7, p. 553-660, 2008
- 18 Yu, M. **Human simulated intelligent control of vehicle suspension systems with MR dampers**, Journal of Sound and Vibration 2008
- 19 Zhou, K. **Essentials of Robust Control**, Prentice Hall, 1998
- 20 Zuo, L. Nayfeh, S. A. **H2 Optimal control of disturbance-delayed systems with application to vehicle suspensions**, Vehicle System Dynamics, vol. 45, n. 3, p. 233-247, 2007.